

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 9

Serie nona

1 Settembre 1951

A Theoretical Investigation of the Photodisintegration of the Alpha-Particle (I).

A. GAMBA

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 6 Giugno 1951)

Summary. — A discussion of four-body problems in nuclear physics is given, using group theory and isotopic spin formalism. Since only the spin and isotopic spin dependence of the wave function is considered, and no assumption is made on nuclear forces, the treatment is meant to be of a very general character and may constitute the basis for any discussion of four-body problems. The fundamental state of the alpha-particle is discussed and it is found that it must be a mixture of three different types of functions, which are actually evaluated. To prepare the ground for a second paper, the final states ($D + D$, $H_3 + p$, $He_3 + n$) are also dealt with. The electric dipole transition is introduced and some preliminary results in form of selection rules for the transition to the state $D + D$ are given.

Introduction.

From the theoretical point of view, the study of the four-body problems in nuclear physics, is not much more difficult than that of the three-body problems, which have been already thoroughly investigated⁽¹⁾. To this purpose it is only necessary to introduce, from the very beginning, a convenient reference

⁽¹⁾ M. VERDE: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 339 (1949); **23**, 453 (1950); *Nuovo Cimento*, **7**, 283 (1950); **8**, 152 (1951); other references may be found in these papers.

When this work was in progress a paper on this same subject by H. B. FLOWERS and F. MANDL appeared in the *Proc. Roy. Soc., A* **206**, 131 (1951). However, as the authors point out, their treatment is on simpler lines than the rigorous method employed by VERDE for the three-body problems, which is generalized in this paper for the four-body problems.

system, so that the symmetry of the problem may be easily brought into evidence.

This can be obtained in an easy way with the methods of group theory and isotopic spin formalism.

In this first paper we consider only the spin and isotopic spin dependence of the wave functions, leaving to a second paper the treatment of the spacial part. Since our treatment is independent from the type of forces which are assumed to be acting among nucleons, the conclusions reached are of a very general character. This paper is therefore meant to be a basis for any discussion of four-body problems and not only of the special problem which we are dealing with.

This is true in particular for sections 1 and 2. In section 3 the fundamental state of the alpha-particle is discussed, and the same is done in section 4 for the possible final states ($D + D$; $H_3 + p$; $He_3 + n$). Finally in section 5 the operator for the electric dipole transition is introduced and some selection rules are derived for the transition to the final state $D + D$ ⁽²⁾.

1. - Group theoretical reduction of the spin and isotopic spin spaces.

a) *Spin*. - Let A_λ and B_λ be the two eigenfunctions of the z -component of the spin operator $\sigma_z^{(\lambda)}$ for the λ -th nucleon ($\lambda = 1, 2, 3, 4$)

$$(1) \quad \sigma_z^{(\lambda)} A_\lambda = A_\lambda, \quad \sigma_z^{(\lambda)} B_\lambda = -B_\lambda;$$

A_λ and B_λ give rise to a vector space of two dimensions, which transforms according to the representation $D_{1/2}$ of the rotation group ⁽³⁾.

The system of four nucleons gives rise then to a vector space of 16 dimensions, which is to be reduced in irreducible representations by means of the Clebsch-Gordan equation

$$(2) \quad D_{1/2} \times D_{1/2} \times D_{1/2} \times D_{1/2} = D_2 + 3D_1 + 2D_0.$$

We obtain one representation D_2 in five dimensions (quintet), three representations D_1 in three dimensions (triplets) and two representations D_0 in one dimension (singlets). As the alpha-particle has spin zero we shall consider only the latter ones, and denote the corresponding eigenfunctions by χ' , χ'' .

If we now consider the behaviour of χ' , χ'' with respect to the symmetric permutation group π_4 of the four nucleons, it is easily shown that χ' , and χ''

⁽²⁾ Similar selection rules have been obtained by other means also by B. H. FLOWERS and F. MANDEL (see reference no. 1).

⁽³⁾ For all arguments on group theory reference is to be made to any book on group theory, especially to H. WEYL: *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (II Ed.).

transform according to the representation R^2 of the group π_4 (see Appendix), what was already anticipated in the notations.

b) Isotopic spin. — Let a_λ and b_λ be two functions which denote for the λ -th nucleon the state of proton and neutron respectively. We can consider a_λ and b_λ as eigenfunctions of an operator $\tau^{(\lambda)}$ (isotopic spin) for which we have in analogy with (1)

$$(1') \quad \tau^{(\lambda)} a_\lambda = a_\lambda, \quad \tau^{(\lambda)} b_\lambda = -b_\lambda.$$

The use of the isotopic spin is especially convenient for, owing to the analogy between (1) and (1'), some of the results we obtain for spin can be immediately extended to the case of isotopic spin. The analogy is complete as far as permutation group is concerned; it, however, fails as soon as rotation group is considered.

In effect the spin state of a particle is completely described by *two* commuting observables: for example the σ_z component and the total spin σ ; on the contrary a *single* observable τ is necessary for a complete description of the isotopic spin state.

It is possible, of course, to introduce the total isotopic spin τ as well as the τ_z component; this was done by VERDE ⁽⁴⁾ (our single τ operator is the same as Verde's τ_z operator, the index z being obviously left out). However, the reduction of the isotopic spin space by means of the Clebsch-Gordan equation (2) is now irrelevant from the physical point of view, so that the discussion of the isotopic spin space with respect to the rotation group must follow a different line: what is gained in mathematics is perhaps lost in physical insight.

Actually in our case, since the alpha-particle consists of two protons and two neutrons, we must take into account all isotopic spin functions of the type

$$a_\lambda a_\mu b_\nu b_\rho,$$

where $\lambda\mu\nu\rho$ is an arbitrary permutation of numbers 1234.

These functions give rise to a vector space of six dimensions, which, if reduced with respect to the symmetric permutation group π_4 , contains once each representation R^s , R^3_+ , R^2 (see Appendix).

The isotopic spin functions will be indicated with the letter ζ and therefore we shall write for the three representations ζ^s ; ζ^1_+ , ζ^2_+ , ζ^3_+ ; ζ' , ζ'' respectively (for notations see section 2). These functions can be identified also in the following way: ζ' , ζ'' are the analogues of χ' , χ'' introduced for the spin; ζ^s is the analogue of the eigenfunction corresponding to the zero eigenvalue of the σ_z component of the spin in the representation D_2 ; ζ^1_+ , ζ^2_+ , ζ^3_+ are the ana-

(⁴) M. VERDE: op. cit.

logues of the three eigenfunctions corresponding to the zero eigenvalue of the σ_z component of the spin in each of the three representations D_1 .

c) *Spin \times isotopic spin.* — In the product space of spin \times isotopic spin, we shall have therefore a representation in $2 \times 6 = 12$ dimensions of the group π_4 . This representation can be reduced in irreducible representations, using table A in the Appendix. We find

$$(3) \quad R^2 \times (R^s + R_+^3 + R^2) = R^s + R_+^3 + 2R^2 + R_-^3 + R^a.$$

All the five representations of π_4 are so present only once, with the exception of R^2 which appears twice.

The functions of the product space spin \times isotopic spin will be denoted by the letter ξ .

2. — Actual evaluation of the eigenfunctions.

For the following the general results of the preceding section are not yet sufficient and we must write down explicitly the eigenfunctions for each representation.

The classical method is to introduce Young's symmetry operators. A Young's operator, when applied to an arbitrary function of n elements, gives rise to a function (let us say a vector), which belongs to a vector space in which an irreducible representation of the group π_n is induced. Operating on such a vector with a general permutation, it is possible to determine the entire space to which it belongs.

However we are mostly interested to obtain directly a complete system of normalized and orthogonal vectors to be used as reference system in each one of such irreducible spaces. It is therefore much more useful to introduce some other operators which must have the property of setting up automatically an orthogonal system of vectors in each irreducible space.

These operators, already employed by VERDE ⁽⁴⁾ for the case of the three-body problem, must be equal in number to the dimensionality of the representation. They are therefore not yet uniquely determined, since it is always possible to obtain by means of orthogonal transformations other sets of similar operators, in the same way as we can change the reference system they have originated. We shall take advantage of this fact in order to simplify greatly our problem. For the representations R^s , R_+^3 these operators are the ones originating the normal coordinates (4), which have a clear physical meaning; for the other representations they are taken so as to give rather simple expressions in the product space. For sake of brevity we do not dwell any more on this subject to show how these operators can be obtained algebraically from Young's operators.

Let us write them out:

$$\begin{aligned}
 &\text{in } R^s \quad T^s = \sum_{\alpha=1}^{24} \frac{P_{\alpha}}{4\sqrt{6}}, \\
 &\quad P_{\alpha} - \text{an arbitrary permutation of the group } \pi_4, \\
 &\text{in } R_+^3 \quad \left\{ \begin{aligned} T_+^1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \{ 3 - (14) - (24) - (34) \} P_{123}, \\ T_+^2 &= \frac{3}{2} \{ (24) - (34) \} P_{123}, \\ T_+^3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \{ 2 \cdot (14) - (24) - (34) \} P_{123}, \end{aligned} \right. \\
 &\quad P_{123} = \frac{1 + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)}{6}, \\
 &\text{in } R^2 \quad \left\{ \begin{aligned} T' &= \frac{1 + (13)(24) - (14) - (23)}{2} P_{(12)(34)}, \\ T'' &= \frac{1 + (23) + (14) + (13)(24) - 2 \cdot (24) - 2 \cdot (13)}{2\sqrt{3}} P_{(12)(34)}, \\ P_{(12)(34)} &= \frac{1 + (12) + (34) + (12)(34)}{4}, \end{aligned} \right. \\
 &\text{in } R_-^3 \quad \left\{ \begin{aligned} T_-^1 &= \frac{(143) - (243) + (24) - (14) + (23)(14) - (13)(24)}{\sqrt{6}} P_{12}, \\ T_-^2 &= \frac{1 - (34) + 2 \cdot (134) - 2 \cdot (13) + (143) - (14) +}{4} \\ &\quad + \frac{(23) - (234) + (13)(24) - (23)(14)}{4} P_{12}, \\ T_-^3 &= \frac{3 - 3 \cdot (34) + 3 \cdot (234) - 3 \cdot (23) + 2 \cdot (243) -}{4\sqrt{3}} \\ &\quad - \frac{2 \cdot (24) + (143) - (14) + (23)(14) - (13)(24)}{4\sqrt{3}} P_{12}, \end{aligned} \right. \\
 &\quad P_{12} = \frac{1 + (12)}{2}, \\
 &\text{in } R^a \quad T^a = \sum_{\alpha=1}^{24} \delta_{\alpha} \frac{P_{\alpha}}{2\sqrt{6}}, \quad \delta_{\alpha} = \begin{cases} +1 & \text{for even permutations} \\ -1 & \text{for odd permutations.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

If the symbol T is substituted respectively by the letters χ , ζ , ξ , φ with the same indices, we obtain a convenient notation for the corresponding eigenfunctions generated in spin, isotopic spin, spin \times isotopic spin and ordinary spaces.

If the above operators are applied to the position coordinates r_1, r_2, r_3, r_4

of the four nucleons, we have the normal system:

$$\begin{aligned}
 Q^s &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4), \\
 Q_+^1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ -r_4 + \frac{1}{3} (r_1 + r_2 + r_3) \right\}, \\
 Q_+^2 &= \frac{1}{2} (r_3 - r_2), \\
 Q_+^3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ -r_1 + \frac{1}{2} (r_2 + r_3) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Nextly we give the expressions for the 12 eigenvectors in the spin \times isotopic spin space:

$$\begin{aligned}
 \xi_s &= \frac{\chi' \zeta' + \chi'' \zeta''}{\sqrt{2}}, \\
 \left\{ \begin{aligned} \xi_+^1 &= \frac{\chi' \zeta_+^2 + \chi'' \zeta_+^3}{\sqrt{2}}, \\ \xi_+^2 &= \frac{\sqrt{2} \chi' \zeta_+^1 - \chi' \zeta_+^3 - \chi'' \zeta_+^2}{2}, \\ \xi_+^3 &= \frac{\sqrt{2} \chi'' \zeta_+^1 + \chi' \zeta_+^3 - \chi' \zeta_+^2}{2}, \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} {}_\alpha \xi^1 &= \frac{\sqrt{2} \chi' \zeta^s - \chi' \zeta'' - \chi'' \zeta'}{2}, \\ {}_\alpha \xi^s &= \frac{\sqrt{2} \chi'' \zeta^s - \chi' \zeta' + \chi'' \zeta''}{2}, \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} {}_\beta \xi^1 &= \frac{\sqrt{2} \chi' \zeta^s + \chi' \zeta'' + \chi'' \zeta'}{2}, \\ {}_\beta \xi^s &= \frac{\sqrt{2} \chi'' \zeta^s + \chi' \zeta' - \chi'' \zeta''}{2}, \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} \xi_-^1 &= \frac{\chi'' \zeta_+^2 - \chi' \zeta_+^3}{\sqrt{2}}, \\ \xi_-^2 &= \frac{\chi'' \zeta_+^3 - \chi' \zeta_+^2 - \sqrt{2} \chi'' \zeta_+^1}{2}, \\ \xi_-^3 &= -\frac{\sqrt{2} \chi' \zeta_+^1 + \chi' \zeta_+^3 + \chi'' \zeta_+^2}{2}, \end{aligned} \right. \\
 \xi_a &= \frac{\chi' \zeta'' - \chi'' \zeta'}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

The eigenvectors of the two representations R^2 , which have been denoted with the indices α and β are, clearly not yet uniquely determined, since all linear expressions of the two eigenfunctions with a single prime have identical transformation properties, with respect to the symmetric permutation group π_4 , and the same is true for the eigenfunctions with a double prime. The usefulness of the particular choice (5) will appear in the next section, as soon as magnetic moment will be considered.

3. - Fundamental state of the alpha-particle.

So far we have not yet taken into account the zero magnetic moment of the alpha-particle. Let us see what kind of informations can be drawn from this.

In the vector model, due to the anomalous magnetic moment of protons and neutrons, the zero magnetic moment of the alpha-particle cannot be explained without a particular assumption.

When dealing with the spin of the alpha-particle, we tacitly assumed that the particle was in an S state. Actually, if it were not so, it should be rather difficult to imagine a mechanism for such an exact compensation of the contributions to the magnetic moment both of the orbital part of the motion and of the part due to the intrinsic magnetic moment of the nucleons. With similar reasoning we conclude that in the fundamental state of the alpha-particle the two protons (neutrons) must have antiparallel spins.

These simple considerations in the vector model can be strenghtened into a rigorous form, and will lead to a further reduction of the possible states (5).

The problem is easily solved by means of group theory. However we prefer to follow an equivalent but more elementary method in order to have the opportunity to introduce some new concepts, which will be needed for the following.

The magnetic moment operator (or more exactly that part of the magnetic moment due to the intrinsic magnetic moment of the nucleons) can be written:

$$(6) \quad \mu = \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ \frac{1 + \tau^{(\lambda)}}{2} \mu_p + \frac{1 - \tau^{(\lambda)}}{2} \mu_n \right\} \sigma_z^{(\lambda)},$$

where μ_p , μ_n are the magnetic moments of the proton and of the neutron respectively. Introducing our symmetrized operators τ^s , τ_+^1 , τ_+^2 , τ_+^3 ; σ_z^s , σ_{z+}^1 , σ_{z+}^2 , σ_{z+}^3 , (in the same way as the coordinate space, the space of all linear combinations of four arbitrary elements can be reduced in the irreducible representations R^s , R_+^3 with respect to π_4) it becomes

$$(7) \quad \mu = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mu_p + \mu_n) \sigma_z^s + (\mu_p - \mu_n) \left\{ \frac{1}{3} \tau_z \sigma_z^s + \tau_+^1 \sigma_{z+}^1 + \tau_+^2 \sigma_{z+}^2 + \tau_+^3 \sigma_{z+}^3 \right\}.$$

Now we must know how operate τ^s , τ_+^1 , τ_+^2 , τ_+^3 , on the corresponding eigenfunctions belonging to the different representations. Writing ξ^s , ξ_+^1 , ξ_+^2 , ξ_+^3 , ξ' , ξ'' , as a single column matrix, we find for such operators the matrix forms:

$$\tau^s = 0,$$

$$(8) \quad \tau_+^1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tau_+^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tau_+^3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

The operators σ_z operate in the same way on the corresponding eigenfunctions χ .

We can now decompose (7) in two parts. The first one

$$\sqrt{\frac{2}{3}} (\mu_p + \mu_n) \sigma_z^s + \frac{1}{3} (\mu_p - \mu_n) \tau^s \sigma_z^s,$$

cancels out all eigenfunctions (5) identically: the second one

$$(\mu_p - \mu_n) \{ \tau_+^1 \sigma_{z_+}^1 + \tau_+^2 \sigma_{z_+}^2 + \tau_+^3 \sigma_{z_+}^3 \},$$

on the contrary only the eigenfunctions

$$(9) \quad \xi^a; \quad \xi_-^1, \quad \xi_-^2, \quad \xi_-^3; \quad a\xi', \quad a\xi''.$$

Therefore these are the only eigenfunctions with eigenvalue zero of the magnetic moment, and so they are the only functions in the spin \times isotopic spin space we shall consider in the fundamental state of the alpha-particle.

Account being taken of the exclusion principle, and denoting with φ the spacial part of the total state function ψ , it is now evident that the funda-

mental state cannot be but a mixture of the following three states:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha) & \varphi^* \xi^a, \\ \beta) & \frac{\varphi_+^1 \xi_-^1 - \varphi_+^2 \xi_-^2 + \varphi_+^3 \xi_-^3}{\sqrt{3}}, \\ \gamma) & \frac{\varphi'_a \xi'' - \varphi''_a \xi'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4. - Final states.

We consider only transitions to the following final states

$$(11) \quad \begin{cases} 1) & D + D \\ 2) & H_3 + p \\ 3) & He_3 + n. \end{cases}$$

It is first required to know how the different permutations P_a operate on the eigenvectors we have chosen for reference in the different representations. To this purpose it is sufficient to write down the matrices of the only generating elements of the group π_4 , since all other matrices can be obtained in form of simple products of these ones.

We have chosen as generating elements the permutations (12), (13), (14). For these, and with our reference system we obtain:

$$\begin{aligned} & \text{in } R^s \quad (12) = 1, \quad (13) = 1, \quad (14) = 1, \\ & \text{in } R_+^3 \quad (12) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (13) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (14) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\ & \text{in } R^2 \quad (12) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (13) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (14) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ & \text{in } R_-^3 \quad (12) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (13) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (14) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \\ & \text{in } R^s \quad (12) = -1, \quad (13) = -1, \quad (14) = -1. \end{aligned}$$

1) The final state is the one in which two deuterons are widely separated, numbers 23 and 14 being the indices of the two deuterons. If the deuterons are in the fundamental state ⁽⁴⁾ the wave function of the system must be:

a) Antisymmetric in the spin \times isotopic spin space (symmetric in ordinary space) with respect to 2,3 and 1,4;

b) Symmetric in the spin space with respect to 2,3 and 1,4;

c) Antisymmetric in the isotopic spin space with respect to 2,3 and 1,4.

In order that condition a) be satisfied by a function belonging to a given representation of π_4 it is necessary that such representation, when considered as representation of the subgroup $\pi_2 \times \pi_2$, contains the representation A^a (see Appendix). Using (12) and the tables in the Appendix we can see that a) is satisfied only by

$$\begin{aligned} \xi^a & \quad \text{in } R^a, \\ \frac{\xi_-^1 + \sqrt{2}\xi_-^3}{\sqrt{3}} & \quad \text{in } R_-^3, \\ {}_a\xi' \text{ and } {}_\beta\xi' & \quad \text{in } R^2. \end{aligned}$$

From (12) it is easily seen that χ' and χ'' are respectively antisymmetric and symmetric with respect to 2,3 and 1,4, so that condition b) is satisfied only by

$$(13) \quad \chi''\zeta' = \frac{-{}_a\xi' + {}_\beta\xi' - \sqrt{2}\xi^a}{2},$$

which satisfies also condition c).

With the same procedure briefly sketched in 1) we find for the other cases:

$$(14) \quad 2) \quad \xi_-^1 - \xi^a,$$

$$(15) \quad 3) \quad \xi_-^1 + \xi^a.$$

5. - Electric dipole transitions.

The interaction operator is ⁽⁴⁾

$$H_{el} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \sum_{\lambda=1}^4 \frac{1 + \tau^{(\lambda)}}{2} v_z^{(\lambda)},$$

which introducing our normal coordinates (4), with the corresponding velocities \dot{Q} , becomes

$$H_{el} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \dot{Q}^s + \frac{1}{3} \tau^s \dot{Q}^s + \tau_+^1 \dot{Q}_+^1 + \tau_+^2 \dot{Q}_+^2 + \tau_+^3 \dot{Q}_+^3 \right).$$

For greater convenience we write simply \dot{Q} for the z -component \dot{Q}_z of the

velocities. In the centre of mass system

$$(16) \quad H_{el} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} (\tau_+^1 \dot{Q}_+^1 + \tau_+^2 \dot{Q}_+^2 + \tau_+^3 \dot{Q}_+^3).$$

The magnetic moment operator defined in (7) commutes with (16) and it is so a constant of the motion. Since the state is initially a mixture of the three states (10), we can therefore conclude that it will remain of this type during all its time evolution.

More precisely we find:

$$(17) \quad \text{for } \alpha) \quad H_{el} \varphi^a \xi^a = \frac{e}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{3}} \varphi^s \{ \dot{Q}_+^1 \xi_-^1 - \dot{Q}_+^2 \xi_-^2 + \dot{Q}_+^3 \xi_-^3 \}.$$

$$(18) \quad \text{for } \beta) \quad H_{el} \left\{ \frac{\varphi_-^1 \xi_-^1 - \varphi_-^2 \xi_-^2 + \varphi_-^3 \xi_-^3}{\sqrt{3}} \right\} = \frac{2}{3} \frac{e}{\omega} \sqrt{\pi\hbar\omega} \times \\ \times \left\{ \xi^a [\varphi_+^1 \dot{Q}_+^1 + \varphi_-^2 \dot{Q}_+^2 + \varphi_-^3 \dot{Q}_+^3] + \alpha \xi' \left[\frac{\varphi_+^2 \dot{Q}_+^2 - \varphi_+^3 \dot{Q}_+^3}{\sqrt{2}} - \varphi_+^1 \dot{Q}_+^3 - \varphi_-^3 \dot{Q}_+^1 \right] - \right. \\ \left. - \alpha \xi'' \left[\frac{\varphi_+^2 \dot{Q}_+^3 + \varphi_+^3 \dot{Q}_+^2}{\sqrt{2}} - \varphi_+^1 \dot{Q}_+^2 - \varphi_-^2 \dot{Q}_+^1 \right] \right\},$$

$$(19) \quad \text{for } \gamma) \quad H_{el} \left\{ \frac{\varphi'_+ \alpha \xi'' - \varphi''_+ \alpha \xi'}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{e}{\omega} \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega}{3}} \{ \sqrt{2} \xi_-^1 [\varphi'_+ \dot{Q}_+^2 + \varphi''_+ \dot{Q}_+^3] - \\ - \xi_-^2 [\sqrt{2} \varphi'_+ \dot{Q}_+^1 - \varphi'_+ \dot{Q}_+^3 - \varphi''_+ \dot{Q}_+^2] + \xi_-^3 [\sqrt{2} \varphi''_+ \dot{Q}_+^1 + \varphi'_+ \dot{Q}_+^2 - \varphi'_+ \dot{Q}_+^3] \}.$$

Comparing these formulae with (13), (14), (15) we can immediately derive some preliminary results in form of selection rules. In effect, since our eigenfunctions are all orthogonal, if two equal eigenfunctions of the spin \times isotopic spin space do not appear both in the final state and in the left hand side of one of the expressions (17), (18), (19), the matrix element for the transition between the corresponding states must necessarily vanish. So, for example, the transition from the states (10) α) and γ) to the final state $D + D$ is forbidden. A detailed discussion of these arguments will be given in the second paper.

The author is greatly indebted to prof. M. VERDE for suggesting the problem and for many invaluable discussions.

APPENDIX

In the first column we give the number of elements belonging to every class, the $+$ or $-$ sign indicating whether the class is even or odd. In the second column there are the corresponding classes denoted with the usual symbols: 21 stands for the class of all elements of the type (12) (3) (4):

02 for the one of all elements of the type (12) (34) and so on. In tables II and III the classes are indicated writing out directly the elements belonging to them. In the remaining columns are given the characters of the different representations.

TABLE I. — *Characters of the group π_4 .*

No. elem.	Repr. Class	R^s	R^3_+	R^2	R^3_-	R^a
1 +	4	1	3	2	3	1
6 —	21	1	1	0	— 1	1
3 +	02	1	— 1	2	— 1	1
8 +	101	1	0	— 1	0	1
6 —	0001	1	— 1	0	1	— 1

TABLE II. — *Characters of the group $\pi_2 \times \pi_2$.*

No. elem.	Repr. Class	A^s	A^1_{+-}	A^1_{-+}	A^a
1 +	(1) (2) (3) (4)	1	1	1	1
1 —	(12) (3) (4)	1	1	— 1	— 1
1 —	(1) (2) (34)	1	— 1	1	— 1
1 +	(12) (34)	1	— 1	— 1	1

TABLE III. — *Characters of the group $\pi_3 \times \pi_1$.*

No. elem.	Repr. Class	B^s	B^2	B^a
1 +	(1) (2) (3) (4)	1	2	1
3 —	(12) (3) (4) (13) (2) (4) (23) (1) (4)	1	0	1
2 +	(123) (4) (132) (4)	1	— 1	1

Extensive use is made in the text, also when not explicitly stated, of the following tables, which are to be obtained from the preceding ones, according to the well known theorems on characters.

A) *Reduction of the product representations $\pi_4 \times \pi_4$.*

$$\begin{aligned}
 R^s \times R^s &= R^s & R_+^3 \times R_+^3 &= R^s + R_+^3 + R^2 + R_-^3 & R^2 \times R^2 &= R^s + R^2 + R^a \\
 R^s \times R_+^3 &= R_+^3 & R_+^3 \times R^2 &= R_+^3 + R_-^3 & R^2 \times R_-^3 &= R_+^3 + R_-^3 \\
 R^s \times R^2 &= R^2 & R_+^3 \times R_-^3 &= R_+^3 + R^2 + R_-^3 + R^a & R^2 \times R^a &= R^2 \\
 R^s \times R_-^3 &= R_-^3 & R_+^3 \times R^a &= R_-^3 & R_-^3 \times R_-^3 &= R^s + R_+^3 + R^2 + R_-^3 \\
 R^s \times R^a &= R^a & R_-^3 \times R^a &= R_+^3 & R^a \times R^a &= R^s
 \end{aligned}$$

B) When considered as representations of $\pi_2 \times \pi_2$ the representations of π_4 reduce in the following way:

$$\begin{aligned}
 R^s &= A^s \\
 R_+^3 &= A^s + A_{+-}^1 + A_-^1 \\
 R^2 &= A^s + A^a \\
 R_-^3 &= A_{+-}^1 + A_{++}^1 + A^a \\
 R^a &= A^a
 \end{aligned}$$

C) When considered as representations of $\pi_3 \times \pi_1$ the representations of π_4 reduce in the following way:

$$\begin{aligned}
 R^s &= B^s \\
 R_+^3 &= B^s + B^2 \\
 R^2 &= B^2 \\
 R_-^3 &= B^2 + B^a \\
 R^a &= B^a
 \end{aligned}$$

RIASSUNTO

Una notevole semplificazione dei problemi di quattro corpi in fisica nucleare può essere ottenuta se fin dall'inizio si tien conto di tutti i dati di simmetria del problema, introducendo un sistema di riferimento adatto. A questo si perviene nel modo più semplice utilizzando la teoria dei gruppi e il formalismo dello spin isotopico. È data una discussione generale del problema, limitando la trattazione al caso della dipendenza della funzione d'onda dallo spin e dallo spin isotopico, senza riguardo al tipo di forze che agiscono nel nucleo, in modo che i risultati possano avere un carattere di grande generalità ed essere utilizzati non solo per il particolare problema che ci interessa, ma per ogni tipo di problema di quattro corpi. Si studiano in particolare lo stato fondamentale della particella alfa, gli stati finali $D + D$, $H_3 + p$, $He_3 + n$. Viene introdotto l'operatore che dà la transizione per dipolo elettrico e si ottengono alcuni risultati preliminari sotto forma di regole di selezione per la transizione allo stato $D + D$.

Sulla velocità di migrazione degli elettroni nelle miscele di Argon e alcool.

A. ALBERIGI QUARANTA, L. MEZZETTI, E. PANCINI (*) e G. STOPPINI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 7 Giugno 1951)

Riassunto. — Viene descritto un nuovo metodo sperimentale per la determinazione dei tempi di transito degli elettroni in contatori di Geiger-Müller. I risultati ottenuti con diverse disposizioni sperimentali vengono utilizzati per studiare la dipendenza dal campo elettrico della velocità di migrazione degli elettroni. Per valori di E superiori a 200 V/cm, in miscela di 9 tor di A + 1 tor di C_2H_5OH , la velocità di raccolta risulta sensibilmente indipendente dal valore del campo elettrico, e pari a $(5,2 \pm 0,8) \cdot 10^6$ cm/s. Questa conclusione viene posta a confronto con i risultati ottenuti da altri Autori, e discussa qualitativamente in termini delle modalità degli urti che gli elettroni subiscono contro le molecole della miscela gassosa. Vengono presentati inoltre alcuni risultati sulle condizioni di miglior impiego dei contatori in misure in cui sia utile rendere i loro ritardi propri indipendenti dalle modalità di propagazione della scarica lungo il filo.

1. — Introduzione.

Come è ben noto un elettrone che si muove in un gas, acquista, sotto l'azione del campo elettrico, una componente di velocità, in media non nulla, nella direzione del campo.

Questa « velocità di migrazione » o di « raccolta » può, mediante opportune schematizzazioni, essere messa in relazione con l'intensità del campo elettrico secondo la formula (1) ⁽¹⁾

$$(1) \quad v \cong \frac{e}{2m} p_0 \frac{\lambda_0}{u} \frac{E}{p},$$

(*) Ora presso l'Università di Sassari.

(1) L. B. LOEB: *Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases* (London, 1939), p. 54.

dove u è un opportuno valore medio della velocità di agitazione dell'elettrone nel campo elettrico E , alla pressione p . Questo valore dipende naturalmente da E , ma è essenzialmente stabilito dalle modalità energetiche degli urti fra l'elettrone e le molecole del gas. Il valore di λ_0 — che è il libero cammino medio dell'elettrone alla pressione unitaria p_0 — varia con u e queste variazioni possono essere molto rapide quando sia sensibile l'effetto Ramsauer, come per esempio nell'Argon ⁽²⁾.

In conclusione la dipendenza di v da E è in genere alquanto complicata e può essere sostanzialmente diversa da gas a gas. Inoltre, le ipotesi semplificative assunte per dedurre la (1) non sono mai rigorosamente verificate.

Quando poi l'elettrone si muove in un miscuglio di gas i fenomeni che determinano la velocità di migrazione divengono più complicati. Anzitutto il libero cammino medio effettivo è determinato da tutti i componenti del miscuglio secondo la

$$(2) \quad \frac{p_{\text{tot}}}{\lambda_{\text{tot}}} = \frac{p_1}{\lambda_1} + \frac{p_2}{\lambda_2} + \dots,$$

dove p_1, p_2, \dots rappresentano le pressioni parziali dei singoli componenti e $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ i corrispondenti cammini liberi medi.

Se ad uno dei componenti competono sezioni d'urto molto maggiori che agli altri, il c.l.m. totale può essere sostanzialmente determinato da quel componente, anche se la sua pressione parziale è piccola rispetto alle altre. Considerazioni analoghe valgono per la velocità media u che può essere determinata da quello dei componenti che dà luogo ad urti con grande perdita di energia, anche se scarsamente rappresentato.

La presenza di quantità, anche assai piccole, di alcuni gas o vapori può pertanto modificare fortemente il valore della velocità di migrazione. Si spieghino in questo modo, almeno in gran parte, le sensibili discrepanze fra le determinazioni sperimentali di v eseguite da un gran numero di ricercatori su gas « puri ». Analogamente le discordanze fra le curve sperimentali e quelle dedotte teoricamente sono imputabili in parte alle eccessive schematizzazioni imposte alla trattazione teorica dalla complicatezza del problema, in parte (probabilmente la maggiore) alla difficoltà di usare, nelle ricerche sperimentali, gas di composizione perfettamente nota ⁽³⁾. Si può osservare, a questo proposito, che il fatto che le velocità di migrazione ottenute sperimentalmente sono in genere superiori a quelle calcolate indica con una certa evidenza che il disaccordo è da attribuirsi alla presenza di impurezze. La maggior parte delle misure alle

⁽²⁾ Vedi, per esempio, E. BRÜCHE: *Erg. d. Ex. Naturwiss.*, **8**, 185 (1929).

⁽³⁾ Misure assai precise e in condizioni di grande purezza sono state recentemente eseguite nei laboratori CISE da L. COLLI e U. FACCHINI.

quali ci riferiamo sono state infatti eseguite su gas nobili, per le molecole dei quali gli urti contro gli elettroni sono prevalentemente elastici. La presenza anche di poche molecole dotate di forti sezioni d'urto per urti anelastici provoca una diminuzione della velocità media u e quindi (secondo la (1)) un aumento della velocità di migrazione v ⁽⁴⁾.

Un accordo assai migliore sussiste invece fra i risultati delle esperienze riguardanti la misura della velocità di migrazione degli elettroni nelle miscele di un gas nobile (Argon) con quantità non trascurabili di vapori di alcool etilico o CO₂. Alcune di queste esperienze sono state eseguite nei laboratori di Los Alamos ⁽⁵⁾ su miscele di Argon e CO₂ osservando con un amplificatore rapido la forma degli impulsi di una camera di ionizzazione nella quale veniva prodotta una intensa ionizzazione concentrata a mezzo di particelle α .

Altri risultati relativi a miscele di Argon e vapori organici sono stati ottenuti dallo studio dei ritardi propri dei contatori di Geiger e Müller ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾. Il ritardo τ con cui la risposta di un contatore segue l'istante in cui il contatore è attraversato da una particella ionizzante veloce, è infatti dovuto, almeno in parte, al tempo di transito τ_1 degli elettroni generati per ionizzazione dalla particella lungo la sua traiettoria nell'interno del contatore, dal punto in cui sono stati creati alle immediate vicinanze del filo, dove si inizia il processo di moltiplicazione a valanga. Questo tempo di transito dipende naturalmente dall'andamento del campo elettrico nell'interno del contatore e dalla dipendenza dal campo della velocità di migrazione.

Ma al ritardo totale della risposta contribuisce anche, in generale, il fenomeno della graduale estensione della scarica lungo il filo centrale con il tempo τ_2 che intercorre fra l'istante in cui ha avuto inizio il processo di moltiplicazione e quello in cui il segnale d'uscita raggiunge un certo valore minimo necessario per azionare il sistema di registrazione. Questo tempo τ_2 dipende dalla posizione, lungo il filo, in cui il processo a valanga si innesca, dalla tensione applicata al contatore (in quanto ne dipende fortemente la velocità di propagazione della scarica) ⁽¹⁰⁾ ed infine dalle caratteristiche del sistema di amplificazione usato.

Ciò che è, più o meno direttamente, accessibile all'esperienza, è il ritardo totale τ ; per ricavare una determinazione della velocità di raccolta degli elet-

⁽⁴⁾ Per una completa bibliografia fino al 1939 vedi L. B. LOEB: op. cit.

⁽⁵⁾ B. ROSSI e STAUB: *Ionization chambers and counters* (New York, 1949), p. 14.

⁽⁶⁾ H. DEN HARTOG e Coll.: *Physica*, **13**, 25 (1947).

⁽⁷⁾ H. DEN HARTOG e Coll.: *Physica*, **15**, 521 (1949).

⁽⁸⁾ C. W. SHERWIN: *Rev. Scient. Instr.*, **19**, 111 (1948).

⁽⁹⁾ A. R. LAUFER: *Rev. Scient. Instr.*, **21**, 244 (1950).

⁽¹⁰⁾ P. HUBER, F. ALDEN, E. BALDINGER e F. METZGER: *Helv. Phys. Acta*, **19**, 207 (1946).

troni occorre evidentemente riferirsi al tempo di migrazione τ_1 , e quindi tener conto del contributo τ_2 . Ciò è stato fatto in vario modo dagli Autori citati ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾: DEN HARTOG ne valuta l'entità, LAUFER lo corregge mediante misure ausiliarie, mentre la tecnica sperimentale di SHERWIN è molto probabilmente indipendente dall'effetto di questo ritardo. Egli infatti invia un pennello di raggi β parallelamente al filo, per modo che la scarica a valanga viene ad interessare quasi contemporaneamente tutta la lunghezza del filo stesso.

Nel presente lavoro ci proponiamo di confrontare quest'ultima serie di risultati con quelli da noi ottenuti con una tecnica analoga, ma con un metodo sperimentale alquanto diverso, e di discutere, sulla base di questo confronto, i processi elementari che determinano il valore della velocità v e la sua dipendenza dal campo elettrico applicato.

2. - Dispositivo sperimentale.

Il metodo da noi usato consiste essenzialmente nel determinare le distribuzioni dei ritardi relativi fra le risposte di due contatori attraversati da una stessa particella ionizzante. Come vedremo in seguito (n. 3, a)), una conveniente amplificazione del segnale fornito dal contatore permette di rendere trascurabili le fluttuazioni di ritardo dovute alle modalità di propagazione della scarica. La distribuzione dei ritardi relativi è allora determinata unicamente dalle distribuzioni dei tempi di raccolta degli elettroni nei due contatori, e queste si possono calcolare, sulla base di alcune ipotesi ragionevoli, quando sia nota la distribuzione spaziale delle traiettorie delle particelle primarie, e la legge di dipendenza dal campo elettrico della velocità di migrazione v degli elettroni nella miscela di riempimento. Inversamente, dalla forma della distribuzione dei ritardi relativi si possono ricavare indicazioni sulla forma della funzione $v(E)$.

a) *Contatori*. - Le misure sono state eseguite su contatori di serie, del tipo convenzionale interamente metallico ⁽¹¹⁾, con raggi 1 cm e 2 cm. La miscela di riempimento era costituita da 90 mm di Argon commercialmente puro, ulteriormente depurato per filtraggio attraverso calcio metallico a 300 °C e 10 mm di C₂H₅OH chimicamente puro (99,8%).

Conviene mettere in rilievo che diverse serie di misure sono state ripetute sostituendo i contatori, con risultati concordanti entro i limiti degli errori sperimentali.

⁽¹¹⁾ R. BEKARDO, L. MEZZETTI e E. PANCINI: *Nuovo Cimento*, 5, 370 (1948).

b) *Apparato elettronico.* — Lo schema d'insieme dell'apparato elettronico impiegato è riprodotto in fig. 1a. Gli impulsi di tensione forniti dai contatori I e II vengono amplificati a mezzo di amplificatori (A_I e A_{II}) a larga banda ed a guadagno variabile. Lo stadio finale di ciascun amplificatore è costituito da un «cathode follower», attraverso il quale l'impulso d'uscita può essere inviato contemporaneamente alla coincidenza doppia D_P (pilota) ed alle linee di ritardo L_I e L_{II} ($t = 1,2 \mu s$, $Z_c = 1050 \Omega$) senza che ne venga sensibilmente diminuita la pendenza iniziale. Le uscite delle due linee L_I ed L_{II} comandano ciascuna un ramo delle due coincidenze doppie D_I e D_{II} , l'altro ramo delle quali è comandato dall'uscita della D_P .

Come è ben noto il segnale di uscita di un circuito di coincidenza doppia è sincrono con l'ultimo dei due impulsi di ingresso. Nel nostro caso i forti ritardi costanti introdotti per mezzo delle due linee garantiscono che l'impulso fornito dalla doppia D_P giunga alle doppie D_I e D_{II} sempre in anticipo rispetto agli impulsi che ad esse giungono attraverso le linee di ritardo. In tal modo le uscite delle D_I , D_{II} risultano sincrono con gli impulsi forniti dagli amplificatori A_I , A_{II} rispettivamente (a parte ritardi costanti, che non alterano la «fase» relativa dei due transienti).

Il potere risolutivo di tutti i circuiti di coincidenza impiegati è di circa $10 \mu s$ ed il suo valore non ha, entro larghi limiti, importanza essenziale. Nei circuiti D_I e D_{II} sono inclusi dei dispositivi che consentono di introdurre dei ritardi di compensazione, regolabili con grande finezza da $\sim 0,1$ a $\sim 0,5 \mu s$.

Gli impulsi d'uscita delle doppie D_I e D_{II} vengono inviati al circuito DM (demodulatore dei ritardi). Questo circuito è costruito in modo tale da fornire in uscita un impulso di tensione la cui ampiezza dipende linearmente dal ritardo relativo Δt dell'impulso di entrata E_{II} rispetto all'impulso d'entrata E_I , per $\Delta t > 0$, cioè tutte le volte che E_I precede E_{II} , mentre è nulla per $\Delta t \leq 0$.

Il segnale d'uscita del demodulatore dei ritardi viene inviato ad un discriminatore (Diser. $+8N$) che seleziona gli impulsi a seconda della loro ampiezza in otto canali di numerazione. A ciascuno di questi canali corrisponde un determinato intervallo di ritardo di E_{II} rispetto ad E_I , la cui ampiezza $\Delta \tau$ può essere fatta variare con continuità (semplicemente modificando la velocità di salita del segnale d'uscita del DM) da un valore minimo di circa $6 \cdot 10^{-8}$ s ad un valore massimo che è praticamente limitato solo dal potere risolutivo delle coincidenze doppie.

Mediante il dispositivo di ritardo supplementare incluso nel circuito D_{II} l'apparecchio può venire aggiustato in modo tale che quando le scariche dei due contatori I e II sono esattamente simultanee il segnale d'uscita del DM abbia una ampiezza A_0 prefissata. Per quanto precede, ciò equivale a dire che l'impulso E_{II} viene artificialmente ritardato rispetto ad E_I di un tempo Δt_0 opportunamente scelto. Un ritardo od un anticipo della scarica del contatore II rispetto a quella del contatore I danno pertanto luogo, all'uscita del DM ,

ad un impulso d'ampiezza A rispettivamente maggiore o minore di A_0 , la differenza $A - A_0$ risultando in valore e segno proporzionale al ritardo τ (positivo o negativo) della scarica del contatore II rispetto a quella del contatore I.

La selezione operata dal discriminatore sulle ampiezze equivale così ad una selezione delle « coincidenze » fra I e II a seconda dei corrispondenti valori del ritardo τ , in tanti intervalli di ampiezza $\Delta\tau$; e la « posizione » dello « zero dei ritardi » dipende dal valore dell'ampiezza A_0 , cioè del ritardo artificiale Δt_0 .

Le nostre misure sono state eseguite con due diversi valori di $\Delta\tau$

$$\Delta\tau_1 = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ s} \pm 7\% \quad \text{e} \quad \Delta\tau_2 = 27 \cdot 10^{-8} \text{ s} \pm 2\%.$$

Piccole fluttuazioni della posizione dello zero dei ritardi, dovute a lievi derive dei parametri dei circuiti elettronici, sono state riscontrate talvolta nel corso delle misure, ma la loro presenza non influisce sensibilmente sui risultati e sulla loro interpretazione. L'entità delle fluttuazioni rilevate è stata comunque sempre inferiore a $2 \cdot 10^{-8}$ s.

Alcune serie di misure sono state eseguite con il dispositivo schematizzato in fig. 1b. Mediante esso vengono selezionati, a seconda del ritardo relativo fra le scariche dei due contatori I e II, le coincidenze dovute ad una particella ionizzante che abbia attraversato anche i due contatori « guardiani » A e B. La

presenza di questi ultimi limita, in misura maggiore o minore a seconda della disposizione geometrica, il fascio delle traiettorie permesse.

Nel seguito indicheremo questo dispositivo come « dispositivo controllato (C) » e il dispositivo di fig. 1a come « dispositivo non controllato (NC) ».

I dettagli dei circuiti impiegati verranno descritti in una nota tecnica separata. Per la tecnica usata nella taratura dell'asse dei tempi vedi ⁽¹²⁾.

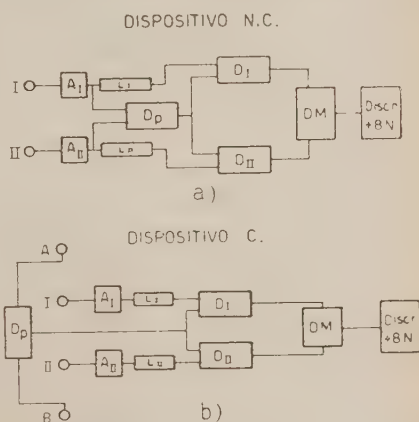


Fig. 1.

⁽¹²⁾ A. ALBERIGI, F. LEPRI, L. MEZZETTI e E. PANCINI: *L'Energia Elettrica*, **27**, fasc. 9 (1950).

3. - Risultati sperimentali.

I risultati delle misure sono rappresentati nelle figure seguenti sotto la forma di istogrammi differenziali; a fianco di ciascun istogramma è indicato il numero totale di eventi sui quali è stata eseguita la statistica.

La larghezza di ciascun canale di ritardo, eccettuato l'ottavo, è di $7,5 \cdot 10^{-8} \text{ s} \pm 7\%$, ove non sia diversamente indicato.

Nell'ultimo canale, invece, vengono registrati tutti gli eventi a cui corrisponde un ritardo τ maggiore del limite superiore del canale precedente ed inferiore a $\sim 10 \mu\text{s}$ (questo valore essendo determinato dai poteri risolutivi dei circuiti di coincidenza).

Si osservi che dato il grande rapporto esistente fra il potere risolutivo delle coincidenze e l'intervallo di ritardi analizzato dai canali precedenti, nell'ultimo canale vengono registrate anche praticamente tutte le coincidenze casuali, nonchè (nel caso del dispositivo «controllato») gli eventi in cui, avendo una particella ionizzante attraversato il telescopio $A I II B$, i contatori $A B$ e I sono scaricati, mentre il contatore II è rimasto inefficiente.

Periodiche misure di controllo della fedeltà dell'intera apparecchiatura (oltre ai sistematici e frequenti controlli delle forme d'onda nei vari punti dei circuiti) sono state eseguite connettendo gli amplificatori A_I ed A_{II} (nel dispositivo C) ad un medesimo contatore. Da queste misure è risultato che il numero delle indicazioni false dell'apparecchio, dovute a perdite dei numeratori meccanici ed eventuali disturbi, non supera in nessun caso il 2% del numero totale degli eventi registrati.

a) *Effetto dell'amplificazione.* - Come abbiamo già accennato nel n. 1, in un esperimento in cui ci si proponga di determinare i tempi di raccolta degli elettroni generati per ionizzazione in un contatore, è indispensabile tener conto delle fluttuazioni di ritardo dovute alla forma della salita dell'impulso del contatore, cioè in definitiva, alla modalità di formazione e di propagazione della scarica lungo il filo. Le fluttuazioni di ritardo che ne risultano all'entrata dell'apparecchio per la misura dei ritardi dipendono evidentemente dalle caratteristiche dei circuiti precedenti, cioè essenzialmente dall'amplificazione dei diversi stati e dai «tagli» eventualmente presenti all'ingresso di ciascuno stadio, e all'ingresso del misuratore dei ritardi.

Si può tuttavia osservare che se l'amplificazione di ogni stadio è sufficientemente elevata (per esempio dell'ordine di 10 o superiore) e i diversi tagli sono tutti dello stesso ordine di grandezza (come nel nostro caso), le fluttuazioni di ritardo si riducono praticamente a quelle derivanti dal primo taglio. Si può allora calcolare facilmente, sulla base di risultati ormai classici sulle velocità di salita degli impulsi dei contatori (¹⁰), l'amplificazione minima suffi-

ciente (prima del primo taglio) per ridurre le fluttuazioni di ritardo in questione al di sotto di un prefissato valore.

Per controllare empiricamente le conclusioni precedenti abbiamo eseguito una serie di misure (sia con il dispositivo NC che con quello C), variando simultaneamente ed in eguali proporzioni il guadagno di entrambi gli amplificatori A_I ed A_{II} (il primo taglio essendo situato all'ingresso dei circuiti di coinci-

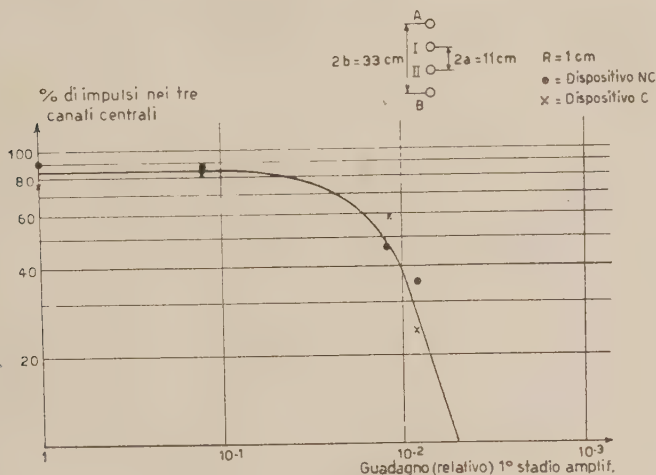


Fig. 2.

denza doppia). In fig. 2 è rappresentato in funzione del guadagno (in unità arbitrarie) il per cento delle coincidenze registrate nei tre canali centrali (3, 4, 5) del discriminatore. Il guadagno 1, che è quello impiegato in tutte le misure che verranno descritte nel seguito, corrisponde ad una amplificazione effettiva di circa 250. In queste misure i contatori erano alimentati ad una tensione di circa 100 V superiore a quella di soglia.

La percentuale di coincidenze registrate nei tre canali centrali costituisce una misura assai comoda e rapida della dispersione della distribuzione dei ritardi relativi: si osservi che per evidenti ragioni di simmetria essa risulta praticamente insensibile a lievi derive della posizione dello zero della scala dei ritardi. Dalla disposizione dei punti sperimentali, fra i quali è stata assai grossolanamente interpolata una curva continua a scopo indicativo, si può a nostro avviso concludere che il guadagno 1, normalmente adottato nelle rimanenti misure, risulta, nelle condizioni sperimentali descritte, largamente sufficiente per garantire l'eliminazione completa degli effetti delle fluttuazioni nella velocità di salita degli impulsi dei contatori (v. però comma b)). Sono state comunque eseguite misure anche con amplificatori aventi un guadagno di

circa 100 (nelle unità convenzionali di fig. 2), con risultati in perfetto accordo con i precedenti. Si osservi che il guadagno 1 (amplificazione effettiva ~ 250) si può facilmente realizzare con amplificatori ad un solo stadio impieganti valvole di tipo corrente.

I risultati ottenuti sono coerenti con quanto si può dedurre dai risultati di HUBER, ALDEN, BALDINGER e METZGER ⁽¹⁰⁾.

b) *Effetti della sovratensione.* — Come è noto ⁽¹⁰⁾ la velocità di propagazione della scarica, e quindi la velocità di salita dell'impulso di tensione sul

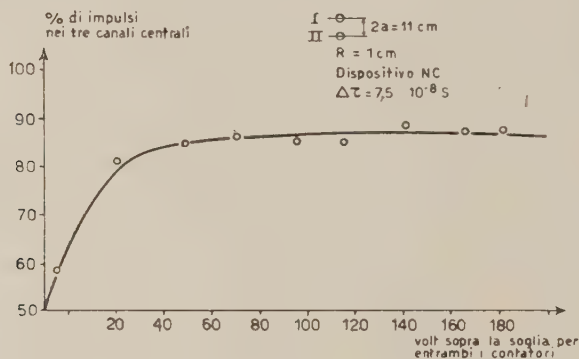


Fig. 3.

filo del contatore, dipende alquanto sensibilmente dalla tensione applicata al contatore stesso.

Per garantirci della indipendenza dei nostri risultati da eventuali variazioni della tensione di alimentazione, o delle caratteristiche di funzionamento dei contatori (per invecchiamento o altre cause), abbiamo perciò eseguito una serie di misure con il dispositivo NC, mantenendo costante (ed eguale ad 1 nelle unità convenzionali prima discusse) il guadagno degli amplificatori A_I e A_{II} e variando la tensione di alimentazione dei contatori.

In fig. 3 è rappresentata la percentuale delle coincidenze registrate nei tre canali centrali (3, 4, 5) del discriminatore, in funzione della tensione sopra la soglia Geiger (sovratensione) per entrambi i contatori. Gli errori statistici sono per ogni punto sperimentale inferiori al 3%.

L'andamento della curva di fig. 3 conferma la validità delle conclusioni del comma precedente, indipendentemente dalla sovratensione entro un intervallo assai ampio. Per sovratensioni inferiori a $30 \div 40$ V, invece, l'amplificazione impiegata risulta insufficiente a rendere trascurabili i ritardi dovuti alla propagazione della scarica lungo il filo.

Tutte le altre misure sono state eseguite con una sovratensione, per ogni contatore, di almeno 100 V e, come si è già detto, con un guadagno uguale ad 1 per tutti gli amplificatori.

In fig. 4 sono riportati tre tipici istogrammi ottenuti alimentando il contatore I con una sovratensione fissa di 180 V e il contatore II con una sovratensione variabile, da 180 a 20 V. L'ultimo dei tre istogrammi appare nettamente spostato verso destra (ritardi) e sensibilmente asimmetrico. L'interpretazione ne è immediata in base alle considerazioni precedenti.

c) *Effetto dell'affollamento.* — In fig. 5 sono rappresentati due istogrammi di distribuzione percentuale dei ritardi, ottenuti aumentando artificialmente, mediante un preparato radioattivo, la frequenza degli impulsi « singoli » di entrambi i contatori I e II (dispositivo NC).

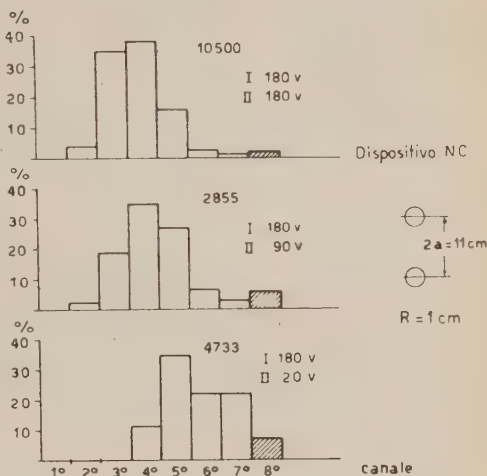


Fig. 4.

Tranne che per il naturale aumento della percentuale registrata nell'ultimo canale, dovuto all'aumento del numero di coincidenze casuali, i due istogrammi non differiscono sensibilmente l'uno dall'altro. In tutte le altre misure (senza preparato radioattivo), la frequenza degli impulsi di ciascun contatore era di circa 600/min. Si può pertanto ritenere che le distribuzioni dei ritardi relativi fra due contatori siano sensibilmente esenti da effetti dovuti ai tempi morti, per lo meno entro un intervallo di frequenza di conteggio come quello indicato.

d) *Effetti geometrici.* — Nelle figg. 9, 10, 11, 12, 13 sono rappresentati gli istogrammi di distribuzione dei ritardi ottenuti con i due dispositivi C ed NC, in diverse condizioni geometriche e con contatori di diverso diametro. La distanza fra gli assi dei contatori I e II è stata indicata con $2a$, e la distanza fra i contatori guardiani A e B (dispositivo C), disposti simmetricamente rispetto al telescopio I-II, è stata indicata con $2b$.

Nel corso delle misure è stato rilevato, come è del resto prevedibile, che le distribuzioni ottenute con il dispositivo C sono alquanto critiche rispetto all'allineamento degli assi dei contatori, in misura tanto maggiore quanto

minore è il raggio dei contatori impiegati e quanto maggiore è il rapporto b/a .

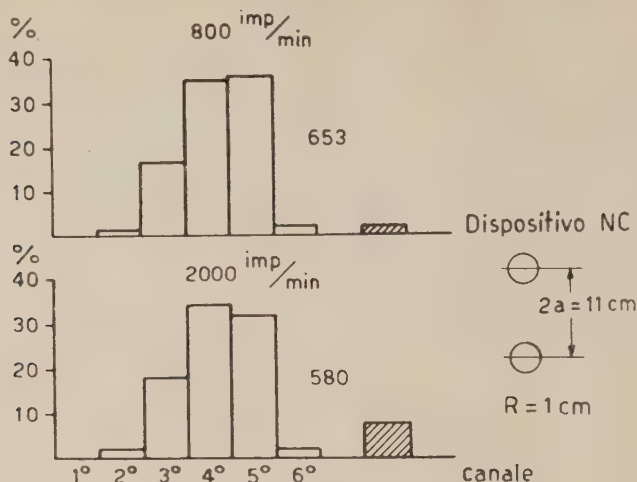


Fig. 5.

Nel numero seguente vedremo come nell'analisi di questi effetti geometrici si possano dedurre indicazioni sulla legge di dipendenza della velocità di migrazione degli elettroni dal campo elettrico.

4. - Analisi dei risultati.

a) *Calcolo della distribuzione dei ritardi relativi.* - Come abbiamo visto, dai risultati discussi nel n. 3, a), b), c), si può concludere che le distribuzioni dei ritardi relativi da noi ottenuti sono effettivamente determinate soltanto dai tempi di raccolta degli elettroni generati per ionizzazione, in ciascun contatore, dalla particella incidente.

Per calcolare la distribuzione statistica dei tempi di raccolta assumeremo anzitutto che la scarica in un contatore venga innescata dall'elettrone che viene generato per ionizzazione dalla particella primaria nella posizione più vicina al filo. Ciò equivale 1) a porre uguale ad 1 la probabilità che un elettrone, giunto nelle vicinanze del filo del contatore, ne innesci la scarica, 2) a trascurare la probabilità di cattura degli elettroni da parte di ioni o di atomi elettropositivi; 3) a trascurare le eventuali fluttuazioni della velocità di migrazione (cfr. questo paragrafo b)). Osserviamo poi che il numero di coppie di ioni per cm generati dalla particella primaria è, nella miscela di riempi-

mento da noi impiegata, dell'ordine di 10. Per traiettorie la cui minima distanza ϱ dal filo del contatore sia sensibilmente superiore alla distanza media fra due coppie di ioni primarie successive, potremo assumere, in prima approssimazione, che i punti da cui partono gli elettroni, nel loro moto di migrazione verso il filo, siano distribuiti con continuità lungo la traiettoria stessa. In tal modo il ritardo dell'innescò della scarica coincide approssimativamente con il tempo di transito relativo alla minima distanza ϱ . L'approssimazione non risulta più ammissibile quando diventi importante la considerazione di traiettorie molto vicine al filo (cfr. questo paragrafo b)).

L'analisi risulta assai semplificata quando (come nelle nostre misure) le particelle primarie con le quali si sperimenta appartengono alla radiazione cosmica: in questo caso, infatti, se i contatori sono disposti a formare un telescopio verticale, a distanza sufficientemente grande rispetto al diametro dei contatori, si riconosce facilmente che: a) ad ogni traiettoria che attraversi i due contatori può essere sostituita, per il calcolo delle distribuzioni dei tempi di transito, la sua proiezione su un piano normale agli assi; b) la minima distanza ϱ della traiettoria dal filo può essere sostituita con l'intercetta x sul diametro orizzontale (fig. 6).

Riferendoci, per ora, al caso più semplice del dispositivo NC, consideriamo una generica traiettoria, che intercetta nei due contatori I e II di fig. 6 rispettivamente le ascisse orizzontali x_I , x_{II} . A queste corrisponderanno i tempi di raccolta

$$(3) \quad t_I = f_v(x_I) = \int_{x_I}^r \frac{dx}{v(E)}; \quad t_{II} = f_v(x_{II}) = \int_{x_{II}}^r \frac{dx}{v(E)},$$

essendo r la distanza dal filo a cui viene innescata la prima valanga.

Questi saranno anche i valori dei ritardi «assoluti» delle risposte dei due contatori; e il ritardo relativo del contatore II rispetto ad I sarà:

$$(4) \quad \tau = t_{II} - t_I = f_v(x_{II}) - f_v(x_I) = F_v(x_I, x_{II}),$$

cioè una funzione di x_I ed x_{II} la cui forma è determinata dalla legge di dipendenza dal campo della velocità di raccolta degli elettroni.

Indichiamo con $P(\tau)d\tau$ la probabilità di trovare un ritardo relativo compreso fra τ e $\tau + d\tau$. Per ovvie ragioni di simmetria la funzione $P(\tau)$ deve

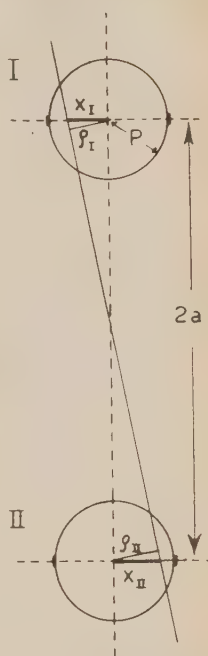


Fig. 6.

essere una funzione pari del suo argomento, e potremo pertanto limitarci a considerare $\tau \geq 0$. Per la stessa ragione potremo limitarci a considerare valori positivi di x_I, x_{II} .

Con le approssimazioni prima accennate la probabilità che una traiettoria attraversi il contatore I tra x_I e $x_I + dx_I$ e il contatore II tra x_{II} e $x_{II} + dx_{II}$ risulta indipendente da x_I ed x_{II} e si può scrivere, opportunamente normalizzata ad 1

$$(5) \quad \Pi(x_I, x_{II}) dx_I dx_{II} = \frac{dx_I dx_{II}}{(R-r)^2}, \quad (x_I, x_{II} \geq 0),$$

dove R rappresenta il raggio interno del catodo cilindrico.

Per ottenere la probabilità $P(\tau)d\tau$ di un ritardo positivo compreso fra τ e $\tau + d\tau$ basta ora (per esempio) eliminare x_{II} tra la (4) e la (5) ed integrare la Π rispetto ad x_I .

Per eseguire il calcolo occorre naturalmente specificare la forma della funzione $v(E(x))$ che compare nella (3).

La funzione $v(E)$ può essere determinata teoricamente, partendo dalla equazione (1), schematizzando opportunamente gli urti che l'elettrone subisce contro le molecole del gas. Prenderemo in esame tre diversi tipi di dipendenza:

$$(6\alpha) \quad v = u_e E/p,$$

$$(6\beta) \quad v = u'_e (E/p)^{1/2},$$

$$(6\gamma) \quad v = u''_e/p,$$

dove u_e, u'_e, u''_e sono tre diverse costanti; la prima legge segue dalla teoria classica di TOWNSEND⁽¹³⁾, la seconda deriva dalla teoria di COMPTON⁽¹³⁾, mentre la terza (velocità di migrazione indipendente dal campo) è suggerita dai risultati sperimentali ottenuti, per valori di E/p sufficientemente elevati, da ROSSI e collaboratori.

Per ciascuno dei tre casi $\alpha), \beta), \gamma)$ l'integrazione rispetto ai parametri geometrici può essere eseguita, e si ottengono per la $P(\tau)$ le espressioni

$$\begin{aligned} (7\alpha) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2B_\alpha^2(R-r)^2} \ln \frac{B_\alpha R + \sqrt{B_\alpha^2 R^2 - \tau}}{B_\alpha r + \sqrt{B_\alpha^2 r^2 + \tau}} \\ \quad \quad \quad (R^3/2 - \tau/B_\alpha^2)^{2/3} \end{array} \right. \quad \text{ove} \quad B_\alpha^2 = \frac{p \ln R/r}{2V u_e} \\ (7\beta) \quad & P(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3B_\beta^2(R-r)^2 \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{x^{3/2} + \tau/B_\beta^2}} \end{array} \right. \quad \text{ove} \quad B_\beta^2 = \frac{2\sqrt{p}}{3u'_e} \sqrt{\ln R/r} \\ (7\gamma) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{B_\gamma^4(R-r)^2} [B_\gamma^2(R-r) - \tau] \end{array} \right. \quad \text{ove} \quad B_\gamma^2 = \frac{p}{u''_e} \end{aligned}$$

(13) Cfr. LOEB: op. cit., p. 177 e segg.

Nella (7) r rappresenta la distanza dall'asse alla quale l'elettrone innesca la prima valanga; il suo valore numerico non è conosciuto con precisione, ma si può valutare, per i contatori da noi impiegati e nelle nostre condizioni di lavoro, che esso è dell'ordine del raggio del filo centrale (0,005 cm).

Per i massimi ritardi possibili si ottengono corrispondentemente le espressioni

$$(8) \quad \begin{cases} T_{\alpha} = B_{\alpha}^2(R^2 - r^2), \\ T_{\beta} = B_{\beta}^2(R^{3/2} - r^{3/2}); \\ T_{\gamma} = B_{\gamma}^2(R - r). \end{cases}$$

Trascurando le potenze superiori alla prima del rapporto r/R ed eliminando le costanti B_{α} , B_{β} , B_{γ} fra le (7) e le (8), si ottengono per $P(\tau)$ le espressioni approssimate

$$(7-bis) \quad \begin{cases} P_{\alpha}(\tau) = \frac{1}{2T} \left(1 + 2 \frac{r}{R}\right) \ln \frac{R}{r} \frac{1 + \sqrt{1 - \tau/T}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tau/T}}, \\ P_{\beta}(\tau) = \frac{2}{3T} \left(1 + 2 \frac{r}{R}\right) \int_{r/R}^{(1 - \tau/T)^{2/3}} \frac{dx}{(x^{3/2} + \tau/T)^{1/3}}, \\ P_{\gamma}(\tau) = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \end{cases}$$

Le distribuzioni $P_{\alpha}(\tau)$, $P_{\beta}(\tau)$ dipendono, come si vede, dal valore del rapporto r/R ; ma per $r \leq 0,01$, $R = 1 \div 2$ cm ne risultano indipendenti entro qualche per cento per $\tau/T \gtrsim 0,05$. Esse sono rappresentate graficamente dalle curve di fig. 7, calcolate per $r/R = 0,01$.

Nel caso del dispositivo «controllato» le limitazioni geometriche imposte dalla presenza dei contatori guardiani rendono il calcolo della $P(\tau)$ alquanto laborioso. Ci siamo limitati a ricavare i valori del massimo ritardo possibile.

A tale scopo consideriamo una traiettoria che intersechi il diametro del contatore I alla distanza x_1 dall'asse; essa dà luogo al ritardo più grande quando sfiora il contatore B (fig. 8). In queste condizioni è approssimativamente ($R \ll a, b$)

$$(9) \quad x_{11} = x_1 \left(1 - \frac{2a}{a+b}\right) + \frac{2a}{a+b} R,$$

e il corrispondente ritardo (massimo relativamente alla ascissa x_1) è appros-

simativamente

$$\begin{aligned}
 (10\alpha) \quad & B_a^2 \left[\left\{ x_1 \left(1 - \frac{2a}{a+b} \right) + \frac{2a}{a+b} R \right\}^2 - x_1^2 \right] \\
 (10\beta) \quad \tau_{\max}(x_1) = & B_b^2 \left[\left\{ x_1 \left(1 - \frac{2a}{a+b} \right) + \frac{2a}{a+b} R \right\}^{3/2} - x_1^{3/2} \right] \\
 (10\gamma) \quad & B_\gamma^2 \left[\left\{ x_1 \left(1 - \frac{2a}{a+b} \right) + \frac{2a}{a+b} R \right\} - x_1 \right].
 \end{aligned}$$

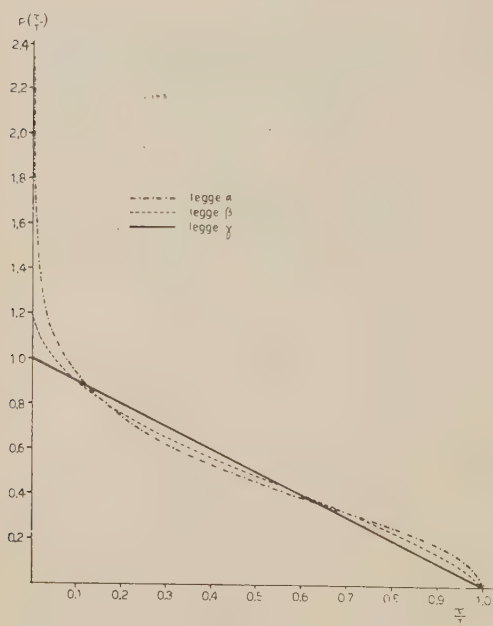


Fig. 7.

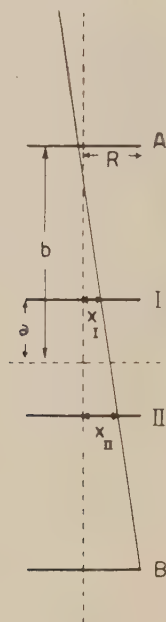


Fig. 8.

Dalle (10) si ricavano immediatamente i valori di x_1 che danno luogo ai massimi ritardi possibili, nei tre casi:

$$\begin{aligned}
 (11\alpha) \quad & \bar{x}_1 = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \\
 (11\beta) \quad & \bar{x}_1 = R \frac{(1 - a/b)^2}{3 + (a/b)^2} \\
 (11\gamma) \quad & \bar{x}_1 = r
 \end{aligned}$$

Dalle (10), (11) si ricavano i valori dei massimi ritardi possibili. Per il rap-

porto q fra i massimi ritardi relativi ai due dispositivi NC e C , con una stessa coppia di contatori I e II, si ottengono così le espressioni

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} q_{\alpha} &= \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{b}{a} \\ q_{\beta} &= \left(1 - \frac{r^{3/2}}{R^{3/2}}\right) \frac{(a^2 + 3b^2)^{1/2}}{2a} \\ q_{\gamma} &= \frac{a + b}{2a} \end{aligned} \right.$$

b) Le fluttuazioni dei tempi di transito e la determinazione sperimentale del ritardo massimo. - In fig. 9 è

rappresentato un tipico istogramma di distribuzione dei ritardi, ottenuto con il dispositivo NC e con contatori di raggio $R = 1$ cm ($r = 0,005$ cm). Tenuto conto del fatto che la percentuale di coincidenze registrata nell'ottavo canale coincide, entro gli errori, con quella calcolata per le coincidenze casuali (cfr. n. 3), si può concludere che il ritardo massimo T è certamente, in queste condizioni sperimentali, non superiore a 3 volte la larghezza $\Delta\tau$ di ciascun canale, cioè a circa $22,5 \cdot 10^{-8}$ s.

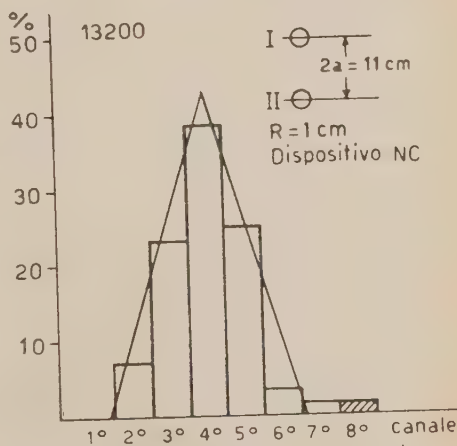


Fig. 9.

Questo risultato si può porre a confronto con quello rappre-

sentato in fig. 10, che rappresenta la distribuzione dei ritardi ottenuta con il dispositivo C , nelle condizioni geometriche indicate. Dalle (12) si deduce che in tali condizioni il ritardo massimo dovrebbe essere, in tutti i tre casi α , β , γ , non superiore a circa 1/10 del corrispondente ritardo massimo relativo al dispositivo NC e l'intera distribuzione dei ritardi dovrebbe essere raccolta entro un solo canale.

La maggiore dispersione che si rileva dall'istogramma di fig. 10 può essere attribuita in parte ad un imperfetto allineamento dei contatori, o ad una imperfetta centratura dei loro fili, e in parte alla non uniforme distribuzione del campo elettrico su tutta la lunghezza del contatore, dovuta agli effetti degli estremi del filo centrale.

Ma una certamente più importante causa di dispersione è costituita dal fatto che le formule (12) sono state dedotte assumendo che il tragitto più breve degli elettroni lenti dal punto di generazione al filo del contatore coincida in ogni caso con la minima distanza dal filo della traiettoria della particella primaria. Per la distribuzione discontinua e casuale delle coppie di ioni lungo la traiettoria primaria ciò è vero solo approssimativamente; ne con-

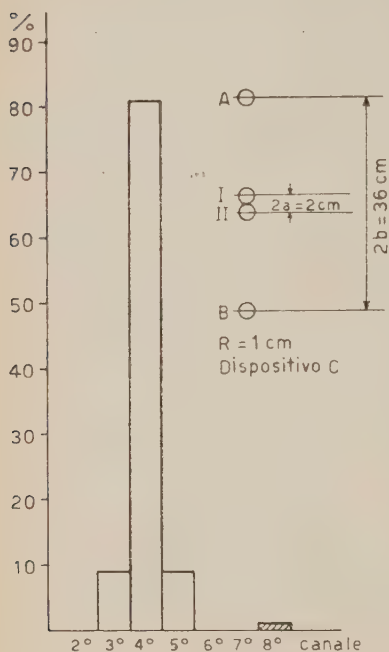


Fig. 10.

seguono, a parità di traiettoria, delle fluttuazioni dei tragitti, e quindi dei tempi di raccolta degli elettroni che portano ovviamente ad una maggior dispersione della distribuzione dei ritardi.

L'importanza relativa di questo effetto è tanto maggiore quanto minori sono le distanze delle traiettorie dai fili dei contatori I e II: ora, mentre nel caso del dispositivo *NC* il ritardo massimo è sempre quello che si ottiene con $x_I = r$ e $x_{II} = R$ (o viceversa), dalle (9), (11) si deduce che nel caso del dispositivo *C* (per $b = 18a$, come in fig. 10) i valori di x_I e x_{II} che danno luogo al massimo ritardo possibile risultano entrambi intorno a $0,5 R$ per la legge α , intorno a $0,3 R$ per la legge β , ed inferiori a $0,1 R$ (essendo r trascurabile) per la legge γ , cioè per $R = 1$ cm, dello stesso ordine di grandezza della distanza fra due coppie di ioni successive, o inferiori.

Come vedremo nel comma seguente, il migliore accordo fra l'insieme dei nostri risultati e le distribuzioni calcolate si ottiene assumendo per queste la legge γ . Un breve calcolo mostra che in tal caso l'allargamento della distribuzione di ritardi per effetto della distribuzione casuale degli ioni primari è dell'ordine del 100% del ritardo massimo calcolato con le (12) per la disposizione di fig. 10, mentre è sempre trascurabile (con i nostri valori di R) in tutte le misure eseguite col dispositivo *NC*. Un effetto di questo genere è pienamente sufficiente a spiegare la dispersione dell'istogramma di fig. 10. Dalle nostre misure non si può pertanto trarre alcuna indicazione circa l'effettiva esistenza di fluttuazioni della velocità di migrazione, come quelle messe in evidenza da SHERWIN (?); osserviamo soltanto, a proposito di queste ultime, che anche esse erano probabil-

mente dovute, almeno in parte, ad effetti strumentali, come la non perfetta collimazione del pennello di raggi β incidente.

Dalle considerazioni precedenti risulta che tutti gli effetti presi in esame, come pure quello dovuto ad eventuali fluttuazioni della velocità di raccolta agiscono concordemente nel senso di aumentare il valore del ritardo massimo effettivo rispetto a quello calcolato.

Per quel che riguarda la determinazione empirica del ritardo massimo dagli istogrammi di distribuzione, osserviamo che un suo valore approssimato per eccesso è dato dalla semiampiezza totale dei canali interessati, mentre un valore per difetto si ottiene dividendo per 2 l'ampiezza di tutti i canali interessati esclusi i due estremi. In mancanza (a priori) di un criterio migliore, assumeremo come definizione di T la media aritmetica di questi due valori, cioè l'intervallo di tempo corrispondente alla metà del numero totale di canali interessati diminuito di 1.

c) *La legge di dipendenza dal campo elettrico della velocità di raccolta degli elettroni.* — Ci proponiamo ora di saggiare, sulla base dei risultati sperimentali, le tre leggi di distribuzione (7) (v. fig. 8) ottenute dalle tre ipotesi (6) sulla forma della funzione $v(E)$.

Una prima indicazione si può ottenere dal confronto diretto delle curve teoriche con gli istogrammi sperimentali ottenuti con il dispositivo NC. Consideriamo l'istogramma di fig. 9, ottenuto con contatori di 1 cm di raggio. Il ritardo massimo, valutato con il criterio precedentemente esposto, risulta essere $T = 18,7 \cdot 10^{-8}$ s, con un errore massimo di $\pm 3,75 \cdot 10^{-8}$ s. La posizione dello zero dei ritardi, che può essere valutata con buona approssimazione con semplici considerazioni di simmetria, è assai prossima al centro del 4° canale. Calcolando i rapporti fra le frequenze corrispondenti a canali contigui si ottiene, con ovvio significato dei simboli, la seguente tabella:

	Sperimentale	Teorico		
		α	β	γ
$\frac{2N_4}{(N_3 + N_5)}$	$1,56 \pm 3\%$	1,87	1,64	1,44
$\frac{N_3 + N_5}{N_2 + N_6}$	$3,5 \pm 10\%$	1,95	2,55	2,50

Gli errori indicati nella seconda colonna sono stati calcolati semplicemente come la somma degli errori relativi da cui sono affette le frequenze N_i .

Una ulteriore informazione si può ricavare dal confronto fra il valore sperimentale e quelli teorici del rapporto fra i ritardi massimi relativi a coppie di contatori di raggio diverso (dispositivo *NC*). Per contatori di 2 cm e 1 cm di raggio, come quelli da noi impiegati, si ottengono, mediante le (8), i seguenti valori teorici:

$$(13) \quad \begin{array}{c|ccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \frac{T_{2\text{cm}}}{T_{1\text{cm}}} & 4 & 2,83 & 2,01 \end{array}$$

Un valore sicuramente per eccesso di $T_{2\text{cm}}$ si può dedurre dalla distribuzione sperimentale rappresentata in fig. 11, ottenuta con una larghezza media dei canali $\Delta\tau = (27 \pm 1) \cdot 10^{-8}$ s:

$$(T_{2\text{cm}})_{\text{max}} = 40,5 \cdot 10^{-8} \text{ s},$$

mentre un valore sicuramente per difetto di $T_{1\text{cm}}$ è (cfr. fig. 9)

$$(T_{1\text{cm}})_{\text{min}} = 15 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Il rapporto di questi due valori ci dà pertanto un valore *sicuramente per eccesso* del rapporto cercato: risulta pertanto

$$\frac{T_{2\text{cm}}}{T_{1\text{cm}}} < 2,70.$$

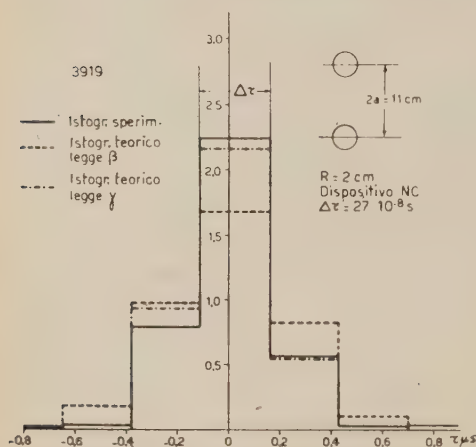


Fig. 11.

Il confronto con i valori teorici conferma le conclusioni precedenti e dà una ulteriore indicazione in favore della legge (γ).

Si possono infine mettere a raffronto i risultati ottenuti, con contatori dello stesso raggio, con i due dispositivi *NC* e *C*. A tale scopo abbiamo eseguito, con il dispositivo *C*, una serie di misure con $b = 3a = 16,5$ cm. I risultati ottenuti, per $R = 2$ cm, sono rappresentati in fig. 12 ($\Delta\tau = 7,5 \cdot 10^{-8}$ s): il ritardo massimo che ne risulta, valutato con il solito criterio, è certamente superiore a $18,5 \cdot 10^{-8}$ s, mentre un valore sicuramente per eccesso del ritardo massimo per il dispositivo *NC* (con $R = 2$) è $T_{NC} = 40,5 \cdot 10^{-8}$ s. Ne risulta, come limite superiore per il valore sperimentale di q :

$$q_{\text{max}} = 2,16.$$

I valori teorici sono corrispondentemente:

(14)

	α	β	γ
$Q = \frac{T_{NC}}{T_C} =$	3	2,65	2

Il confronto è nettamente a favore della validità della legge (γ). Nelle figg. 11, 13, le distribuzioni sperimentali (dispositivo NC, $R = 2$ cm) sono poste direttamente a confronto con le distribuzioni teoriche calcolate assu-

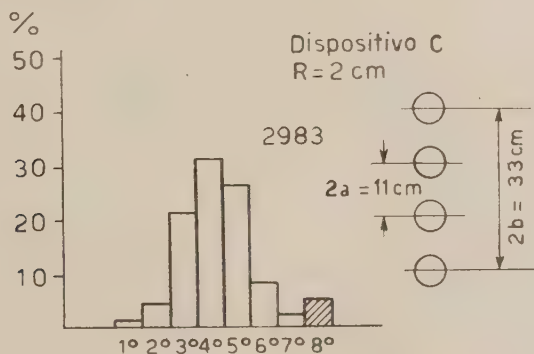


Fig. 12.

mendo per ciascuna come ritardo massimo il valore ottenuto moltiplicando il valore sperimentale relativo ai contatori con $R = 1$ cm per il corrispondente rapporto teorico (13). In fig. 13, la marcata irregolarità della parte destra dell'istogramma sperimentale è dovuta a parziale disfunzione del dispositivo di registrazione meccanica del 6° canale di ritardo, che ha provocato il trasferimento di una sensibile percentuale degli eventi dal 6° al 5° canale.

Una volta assunta, sulla base dei risultati precedenti, la distribuzione corrispondente alla legge di velocità (γ), si può procedere ad una più precisa valutazione del ritardo massimo. Con semplici considerazioni geometriche si può infatti impostare con i dati sperimentali un sistema di due equazioni in due incognite, una di queste essendo il ritardo massimo T , e l'altra una ascissa che individua la posizione dello zero dei ritardi rispetto al limite fra due canali di ritardo contigui. Con questo metodo abbiamo trovato, rispettivamente per $R = 2$ cm ed $R = 1$ cm, i due valori di T

$$T_{1\text{cm}} = (17,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-8} \text{ s}, \quad T_{2\text{cm}} = (34,7 \pm 2,9) \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Gli errori indicati sono errori massimi derivanti essenzialmente dalla indeterminazione del valore di $\Delta\tau$. L'ottimo accordo del rapporto T_{2cm}/T_{1cm} così trovato con il valore teorico (cfr. (13)), non costituisce una ulteriore conferma

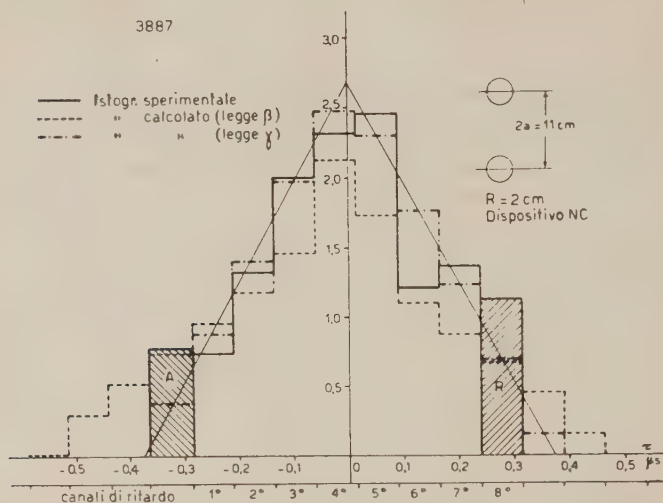


Fig. 13. - Confronto fra distribuzione sperimentale e distribuzioni teoriche. A = numero valutato degli anticipi $\geq 28,5 \cdot 10^{-8}$ s; R = numero valutato dei ritardi $\geq 24 \cdot 10^{-8}$ s.

della validità della legge (γ), ma piuttosto una prova della coerenza interna del metodo seguito.

5. - Discussione dei risultati.

Dall'esame delle tabelle del numero precedente risulta che il migliore accordo con i risultati sperimentali si ottiene con una distribuzione di ritardi del tipo (7γ). Si può pertanto concludere che la velocità di migrazione degli elettroni dal campo elettrico in una miscela di 90 mm $A + 10$ mm C_2H_5OH è indipendente dal campo elettrico (nell'intervallo di valori di E/p corrispondente alle nostre condizioni sperimentali) o almeno è una funzione assai lentamente variabile del campo stesso.

Il suo valore può allora essere immediatamente ricavato dai valori sperimentali del ritardo massimo.

Dalle (15) si ottiene:

$$v = (5,9 \pm 0,5) \cdot 10^6 \text{ cm/s.}$$

Questo valore è in buon accordo con quello che si può dedurre dai dati di LAUFER ⁽⁹⁾, che misura i tempi di raccolta di fotoelettroni dalla parete al filo del contatore in condizioni sperimentali assai prossime alle nostre; supponendo, contrariamente a quanto fa l'Autore, che la velocità di migrazione sia indipendente dal campo elettrico, si ottiene infatti

$$v = 4,6 \cdot 10^6 \text{ cm/s.}$$

con una precisione che non è valutabile dai risultati pubblicati.

Un accordo ancora migliore si ottiene dai risultati di TICHO ⁽¹⁴⁾ ottenuti in condizioni sperimentali quasi identiche alle nostre; da essi si può infatti calcolare, sotto la stessa ipotesi, il valore

$$v = (5,2 \pm 0,8) \cdot 10^6 \text{ cm/s.}$$

Dai risultati sperimentali di SHERWIN ⁽⁸⁾, infine, si può dedurre, per valori del campo elettrico prossimi ai nostri, una velocità di migrazione di circa 10^7 cm/s, con un errore che si può valutare intorno al 100%. SHERWIN in realtà conclude per una dipendenza della velocità dal campo elettrico del tipo (β) ; ma la precisione dei suoi risultati sperimentali non è tale da poter escludere leggi di tipo diverso.

Una conferma delle nostre conclusioni si può invece trovare nelle curve di velocità ottenute nei laboratori di Los Alamos ⁽⁵⁾ su miscele di Argon e Anidride carbonica, che indicano chiaramente una tendenza della velocità di migrazione a divenire indipendente da E/p per valori di E/p sufficientemente elevati. Anche i valori di v ricavati in queste condizioni sono assai prossimi al nostro.

Un gruppo di risultati interessanti è stato ottenuto da DEN HARTOG ed altri ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ inviando in un contatore da 3,5 cm di raggio a diverse distanze dal filo, un pennello di raggi cosmici collimato da un telescopio di due contatori di 6 mm di raggio e misurando il ritardo tra la coincidenza doppia del telescopio e la risposta del contatore maggiore.

Per quanto suscettibili di alcune critiche questi risultati indicano chiaramente:

a) Che per valori di E/p compresi tra 0,6 e 2 V/cm · mm Hg la velocità è proporzionale all'intensità del campo elettrico; la mobilità risulta essere, in una miscela di 90 mm A + 10 mm C₂H₅OH, di $15.700 \pm 800 \text{ cm}^2/\text{V s}$.

b) Che per percentuali di C₂H₅OH superiori al 3% la probabilità di collisione degli elettroni contro le molecole di Argon è trascurabile rispetto a quella relativa agli urti contro le molecole di C₂H₅OH.

⁽¹⁴⁾ H. K. TICHO: *Rev. Scient. Instr.*, **18**, 271 (1947).

Nel confrontare questi risultati con i nostri occorre rilevare che i nostri risultati si riferiscono a valori di E/p compresi fra circa 1,5 e circa 300 V/cm · mm Hg (cfr. fig. 14).

Pur tenendo conto delle incertezze sperimentali, il confronto suggerisce

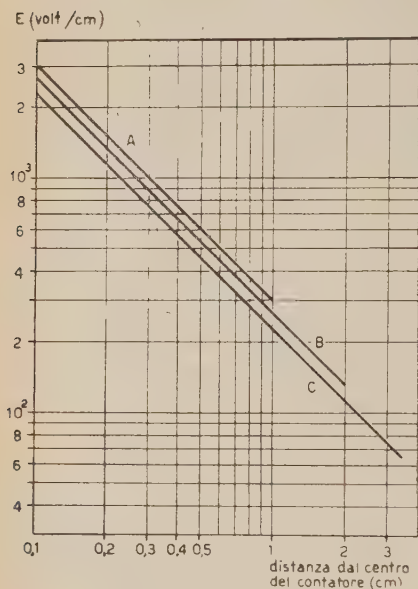


Fig. 14. - Andamento del campo elettrico con la distanza dall'asse del contatore. Diametro del filo centrale $2r = 0.1$ mm; tensione applicata $V = 100$ V; curva A per contatori di raggio 1 cm; curva B per contatori di raggio 2 cm; curva C per contatori di raggio 3,5 cm.

l'esistenza di due distinti regimi di velocità, l'uno (rappresentato approssimativamente dalla legge $v = kE$) valido per valori di E/p inferiori a circa $1 \div 1,5$ V/cm · mm Hg e l'altro ($v \sim \text{costante}$) approssimativamente valido per $E/p > 1,5 \div 2$ V/cm · mm Hg.

Questo comportamento si può giustificare almeno qualitativamente considerando l'effetto degli urti che l'elettrone, nel suo moto di migrazione, subisce contro le molecole del gas nobile e del vapore organico della miscela. A questo scopo osserviamo anzitutto: a) che la sezione d'urto degli elettroni contro le molecole di alcool è sensibilmente indipendente dalla velocità media u (di agitazione termica) ⁽¹⁵⁾; b) che valori di u inferiori a $\sim 5 \cdot 10^7$ cm/s, il libero cammino medio per urti contro molecole di Argon è (tenuto conto del rapporto fra le rispettive pressioni parziali) molto maggiore del corrispondente l.c.m. contro molecole di alcool ⁽¹⁶⁾. Si veda in proposito la fig. 15, in cui i l.c.m. sono rappre-

sentati in funzione della velocità media e della corrispondente energia di agitazione termica.

D'altra parte, se nella (1) si assume per il l.c.m. il valore (indipendente da u e quindi dal campo) corrispondente ai soli urti contro le molecole di alcool, cioè si suppongono effettivamente trascurabili quelli contro le molecole di Argon, e si confronta la (1) con la legge sperimentale di DEN HARTOG

⁽¹⁵⁾ F. SCHMIEDER: *Zeits. f. Elektrochemie*, **36**, 700 (1930).

⁽¹⁶⁾ C. RAMSAUER e R. KOLLATH: *Naturwiss.*, **16**, 671 (1929).

$v = kE$, si ottiene per u il valore

$$u = 4,4 \cdot 10^7 \text{ cm/s},$$

che giustifica, a posteriori, l'approssimazione fatta.

Dalla costanza di λ segue allora che anche u deve essere, nella regione in

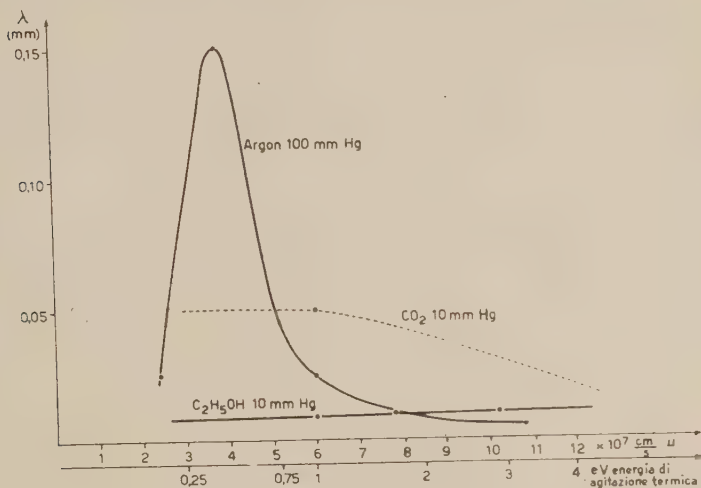


Fig. 15.

cui è valida la legge di DEN HARTOG, indipendente, o dipendente molto lentamente, da E . Questo risultato si può attribuire all'effetto degli urti anelastici che l'elettrone può compiere contro le molecole di Alcool, eccitandone le frequenze proprie: in effetti i vapori di C_2H_5OH presentano delle intense bande di assorbimento infrarosse nella zona dello spettro corrispondente alla energia di agitazione termica dell'elettrone ($\sim 0,4$ eV). La determinazione precisa delle bande effettivamente eccitate e delle rispettive probabilità di eccitazione si presenta come un problema assai complicato.

Il fatto che per valori di E superiori ad un certo limite la velocità di migrazione tende a divenire indipendente da E sembra indicare che al crescere di E sopra a questo limite l'energia media di agitazione termica tende a crescere « scavalcando » le bande di assorbimento e raggiungendo valori per i quali (cfr. fig. 14) la sezione d'urto relativa alle molecole di Argon non è più trascurabile. Il cammino libero medio totale λ diminuisce, tendendo, concordemente con l'aumento di u , a compensare, nella (1), l'effetto dell'aumentato valore di E .

SUMMARY

A new experimental method for determining the transit time of the electrons in a Geiger-Müller counter is described. Use is made of the results obtained with various experimental arrangements for the study of the dependence of the drift velocity upon the electric field strength. For values of E greater than 200 V/cm, in a mixture of 90 mm Hg of A and 10 mm Hg of C_2H_5OH , the drift velocity turns out to be practically independent from the applied field, with a value of $(5.2 \pm 0.8) \cdot 10^6$ cm/s. This conclusion is compared with the results obtained by other Authors, and discussed qualitatively in terms of the different types of collisions which the electron undergoes with the molecules of the gaseous mixture. Some results are also given on the best operating conditions of G.M. counters in experiments in which it is important to minimize the time lags due to the spread of the discharge along the central wire.

Sulla costituzione degli sciami estesi di raggi cosmici.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 7 Giugno 1951)

Riassunto. — Viene studiata a Catania (35 m s.l.d.m.), mediante contatori di Geiger-Müller, la struttura laterale degli sciami estesi di raggi cosmici, selezionando sciami aventi nella parte centrale densità media ≈ 25 particelle/m². Si trova che il rapporto tra la densità delle particelle penetranti e la densità totale di particelle cresce leggermente col crescere della distanza dall'asse dello sciame. Si esclude che tale aumento possa dipendere dalla disposizione sperimentale dei contatori.

1. — Introduzione.

Le misure eseguite sugli sciami estesi dei raggi cosmici mostrano che essi sono costituiti oltre che da elettroni e fotoni (particelle molli) anche da particelle aventi un potere penetrante maggiore: mesoni μ , nucleoni, mesoni π (particelle penetranti). Queste costituiscono qualche per cento del numero totale di particelle di uno sciame e sembra siano generate nel « core » dello sciame non molte centinaia di metri sopra il sistema che le rivela. La distribuzione laterale delle particelle penetranti risulta simile a quella delle particelle molli. Per determinare tale distribuzione sono state eseguite misure con contatori di Geiger Müller a 3260 m s.l.d.m. da G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN ⁽¹⁾ ed a 35 m s.l.d.m. da C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI ⁽²⁾ ⁽³⁾. Da queste misure si ricava che la densità (numero di particelle per metro quadrato) della componente penetrante decresce col crescere della distanza dal centro dello sciame presso a poco come quella degli elettroni.

⁽¹⁾ G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949); nel seguito indicata con I.

⁽²⁾ C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI: *Boll. Accademia Gioenia*, **4**, 169 (1949).

⁽³⁾ C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI: *Nuovo Cimento*, **7**, 207 (1950); nel seguito indicata con II.

Più precisamente le misure I e II indicano un leggero aumento del rapporto particelle penetranti/particelle molli col crescere della distanza dal centro dello sciame. L'aumento è di un fattore 2 fra 5 e 100 m nella misura I e di un fattore 1,6 fra 0 e 50 m nella misura II.

La parte centrale dello sciame veniva rivelata in I mediante opportuni « core selectors » i quali registravano i fotoni e gli elettroni di elevata energia associati con gli sciami stessi: la maggior parte degli sciami rivelati da un « core selector » aveva il « core » non più distante di 10 m dal sèlettore stesso. Nella misura II la parte centrale dello sciame veniva rivelata mediante le coincidenze $A + B + C$ fra tre gruppi di contatori disposti in un piano orizzontale ai vertici di un triangolo equilatero di m 4 di lato: come è mostrato in II l'80% dei « core » degli sciami registrati da ABC cadono entro un cerchio di raggio $r = 10$ m e centro nel centro O della circonferenza passante per ABC . La funzione di un « core selector » in I è quindi paragonabile a quella del sistema di contatori ABC in II.

Osserviamo che se si registrano le coincidenze fra un « core selector » ed un gruppo di contatori, o analogamente fra ABC ed un gruppo di contatori, il « core » dello sciame è in media uniformemente distribuito attorno al « core selector » o ad ABC quando il gruppo di contatori è posto in vicinanza del « core selector » o di ABC , ed invece risulta spostato verso il gruppo di contatori quando questo si allontana dal « core selector » o da ABC . Ne risulta una contrazione nell'asse delle distanze fra il gruppo di contatori che rivela le particelle appartenenti a sciami ed il sistema ABC o il « core selector » che rivela il « core » degli sciami; la contrazione è tanto maggiore quanto minore è la probabilità che il gruppo di contatori venga colpito. È noto che tale probabilità è data da $1 - \exp[-SA]$ in cui S è la superficie del gruppo di contatori e A la densità delle particelle che arrivano su di esso. Nelle misure I e II il termine SA era maggiore per il gruppo che registrava le particelle molli e minore per quello che registrava le particelle penetranti. Quest'ultimo aveva quindi minore probabilità di essere colpito, e la contrazione dell'asse delle distanze, nel caso in cui si indagava sulla distribuzione delle particelle penetranti risultava perciò maggiore che nel caso in cui si indagava sulla distribuzione delle particelle molli. Si è introdotto perciò nelle precedenti misure un errore sistematico al quale potrebbe essere attribuito in parte il riscontrato aumento del rapporto particelle penetranti/particelle molli al crescere di r . Quanto tale errore abbia potuto influire sui risultati non è facile prevedere. Nella presente misura, eseguita al fine di confrontare la distribuzione laterale delle particelle penetranti con la distribuzione laterale delle particelle molli, la predetta causa di errore è stata eliminata.

2. - Dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale era costituito da tre gruppi di contatori *ABC* destinati a rivelare gli sciami i cui «core» cadono nei pressi di *ABC*, un gruppo di contatori *P* che rivela le particelle penetranti appartenenti agli sciami registrati da *ABC*, ed un contatore *E* che rivela le particelle molli + penetranti appartenenti a sciami registrati da *ABC* (fig. 1).

Tutti i contatori avevano pareti di ottone di un mm di spessore ed erano riempiti con miscela di Argon ed alcool. I tre gruppi di contatori *ABC* erano disposti in un piano orizzontale ai vertici di un triangolo equilatero di m 4 di lato, entro una sala costruita su una grande terrazza del palazzo delle Scienze, sotto un tetto di complessivi pochi grammi/cm² fra legno, eternit e masonite. Il gruppo schermato *P* ed il gruppo non schermato *E* erano posti entro una capanna di legno con copertura di eternit e venivano posti successivamente a distanze $r = 2,32; 25, 55$ m dal centro *O* di *ABC*.

Lo schermo del gruppo *P* era costituito da 15 cm Pb + 1 cm Fe sopra 7,5 cm Pb ai lati, e 4,5 cm Fe sotto i contatori.

I gruppi *ABC* avevano ciascuno superficie $S = 420$ cm²; il gruppo *P*, costituito da 13 contatori, aveva superficie $S_p = 1820$ cm², il gruppo *E* aveva superficie $S_e = 72$ cm².

Mediante tre circuiti di coincidenze del tipo Rossi, con tempo di risoluzione $t = 2,5 \times 10^{-5}$ s venivano registrate contemporaneamente le coincidenze $A + B + C = T$, $A + B + C + P = T + P$, $A + B + C + E = T + E$. Nella I e II serie di misure, rispettivamente $r = 2,32$ m ed $r = 25$ m, gli impulsi dei gruppi *P* ed *E* venivano amplificati ed inviati attraverso cavi schermati ai circuiti di coincidenze posti presso i gruppi *ABC*. Nella III serie di misure, $r = 55$ m, l'impulso proveniente dalle coincidenze *T*, amplificato ed invertito, veniva inviato attraverso un cavo schermato ai circuiti di coincidenze $T + P$ e $T + E$ posti vicino ai gruppi *P* ed *E*. Circuiti di registrazione e contatori venivano controllati giornalmente.

Poichè le coincidenze $T + P$ e $T + E$ venivano misurate contemporaneamente, una eventuale variazione della efficienza dei contatori e dei gruppi *ABC*

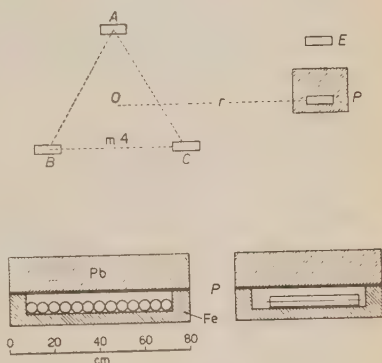


Fig. 1. - Disposizione dei contatori.

influisce in modo uguale sulle coincidenze $T + P$ e $T + E$ e si elimina nei rapporti $(T + P)/(T + E)$. È invece essenziale che l'efficienza del contatore E e dei contatori del gruppo P non vari durante tutta la misura; di questi contatori veniva determinato giornalmente il nullo effetto e periodicamente veniva determinato il pianerotolo. I risultati della misura sono riportati nella tabella I. La correzione per le coincidenze casuali è stata apportata solo alle T (la frequenza di tali coincidenze è stata valutata determinando con una serie di misure a parte la frequenza delle T al variare della costante RC di entrata del circuito di coincidenze); per gli eventi $T + P$ e $T + E$ le coincidenze casuali risultavano al massimo (cioè per $r = 55$ m) dell'ordine dell'1% e 0,1%, rispettivamente, delle coincidenze effettive.

TABELLA I.

Serie	r	Minuti	T	$T + P$	$T + E$	R_p	R_e	R_p/R_e
I	2,32	12 410	1 198	265	371	0,031 $\pm 0,002$	1,32 $\pm 0,08$	0,023 $\pm 0,0020$
II	25	17 304	1 527	170	226	0,0124 $\pm 0,001$	0,496 $\pm 0,030$	0,025 $\pm 0,0025$
III	55	16 267	1 467	77	93	0,0055 $\pm 0,0005$	0,176 $\pm 0,011$	0,0313 $\pm 0,0033$

3. — Interpretazione dei risultati.

Se $F(\Delta) = K\Delta^{-\gamma}$ rappresenta lo spettro integrale di densità degli sciami estesi, in cui $F(\Delta)$ è la frequenza degli sciami aventi densità maggiore di Δ , la frequenza degli eventi $T + P$ è legata alla frequenza degli eventi T dalla relazione — v. per esempio I e II —

$$\frac{T + P}{T} = \frac{K \int_0^{\infty} \gamma \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^3 (1 - \exp[-\alpha S\Delta]) d\Delta}{K \int_0^{\infty} \gamma \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^3 d\Delta} =$$

$$= \frac{K\gamma S^{\gamma}}{\gamma(\gamma-1)} \Gamma(2-\gamma) \{-3 + 3 \cdot 2^{\gamma} - 3^{\gamma} - \alpha^{\gamma} + 3(\alpha+1)^{\gamma} - 3(\alpha+2)^{\gamma} + (\alpha+3)^{\gamma}\}$$

$$= \frac{K\gamma S^{\gamma}}{\gamma(\gamma-1)} \Gamma(2-\gamma) \{-3 + 3 \cdot 2^{\gamma} - 3^{\gamma}\}$$

in cui $\alpha = R_p(S_p/S)$ ed R_p = densità delle particelle penetranti a distanza r da ABC /densità totale di particelle in ABC . I coefficienti K e γ variano così poco al variare di Δ da poter essere ritenuti approssimativamente costanti entro un largo intervallo di densità. Il valore di γ a basse quote s.l.d.m. può essere espresso dalla relazione (*) $\gamma = 1,31 + 0,038 \log 1/S$ (S in m^2 e log naturali), e nel nostro caso risulta $\gamma =$ circa 1,45. Nel grafico in fig. 2 sono riportati i valori che il rapporto $(T + P)/T$ assume per $\gamma = 1,45$ per valori di α compresi fra 0,5 e 0,05 — v. anche I —. In base a tale grafico ed ai valori sperimentali dei rapporti $(T + P)/T$ alle varie distanze r si sono ricavati i valori di α e quindi di R_p .

Con procedimento analogo sono stati ricavati i valori di R_e = densità totale delle particelle alla distanza r /densità totale di particelle presso ABC . I valori di R_p ed R_e così ottenuti sono riportati nella tabella insieme coi valori dei rapporti R_p/R_e .

I valori dei rapporti R_p/R_e sono riportati inoltre in funzione di r nella fig. 3. Nel calcolo degli errori di R_p ed R_e si è tenuto conto solo degli errori statistici delle $T + P$ e $T + E$. Nella stessa fig. 3 sono riportati i valori dei rapporti Δ_p/Δ_e relativi alla misura I eseguita a 3260 m s.l.d.m.: la curva trattegg-

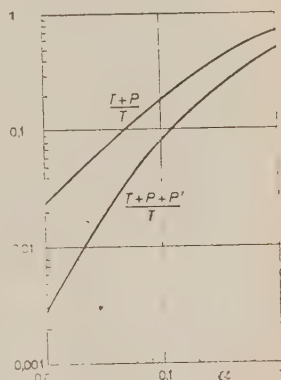


Fig. 2. - Valori teorici di $(T + P)/T$ e $(T + P + P')/T$ in funzione di $\alpha = RSp/Se$.

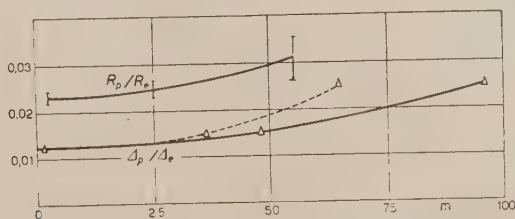


Fig. 3. - I valori di

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{\text{densità delle particelle penetranti alla distanza } r}{\text{densità totale di particelle alla distanza } r}$$

si riferiscono alla presente misura (35 m s.l.d.m.), quelli di

$$\frac{\Delta_p}{\Delta_e} = \frac{\text{densità delle particelle penetranti alla distanza } r}{\text{densità totale di particelle alla distanza } r}$$

si riferiscono alle misure di G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN (3260 m s.l.d.m.).

(*) G. COCCONI e V. COCCONI TONGIORGI: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

giata si riferisce agli stessi valori dei rapporti quando i valori di r a 3260 m vengono moltiplicati per il rapporto $74/114 =$ lunghezza caratteristica al l.d.m./lunghezza caratteristica al livello della misura I.

Si può ritenere che nella presente misura la contrazione dell'asse r cui si è accennato all'inizio non influisca sui valori dei rapporti R_p/R_e al crescere di r . Infatti, poichè la probabilità che una particella appartenente ad uno sciame colpisca un gruppo di contatori di superficie S è data da $1 - \exp[-S\Delta]$ se Δ è la densità delle particelle registrate dal gruppo di contatori, i gruppi P ed E hanno ugual probabilità di essere colpiti da particelle di sciame registrati da ABC se $S_p\Delta_p = S_e\Delta_e$. Poichè i valori di S_p ed S_e sono tali da soddisfare approssimativamente questa condizione ($S_e/S_p = 0,039$; $\Delta_p/\Delta_e = 0,025 \div 0,03$) si può ritenere che la contrazione dell'asse r influendo in modo eguale nei rapporti $(T + P)/T$ e $(T + E)/T$ non influisca nei rapporti R_p/R_e .

Una determinazione in cui la contrazione dell'asse r sia del tutto eliminata potrebbe effettuarsi collocando un gruppo P' ed un gruppo E' in posizione simmetrica ai gruppi P ed E rispetto al centro O e registrando le $(T + P + P')/T$ e $(T + E + E')/T$ per vari valori di r . Se $S_p = S_{p'}$ si ha

$$\begin{aligned} (T + P + P')/T &= \frac{\int_0^{\infty} \gamma \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^2 (1 - \exp[-\alpha S\Delta])^2 d\Delta}{\int_0^{\infty} \gamma \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^2 d\Delta} = \\ &= \frac{K\gamma S^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \Gamma(2-\gamma) \{-3 + 3 \cdot 2^\gamma - 3^\gamma - 2[\alpha^\gamma - 3(1+\alpha)^\gamma + 3(2+\alpha)^\gamma - \\ &\quad - (3+\alpha)^\gamma] + (2\alpha)^\gamma - 3(1+2\alpha)^\gamma + 3(2+2\alpha)^\gamma - (3+2\alpha)^\gamma\}; \\ &: \frac{K\gamma S^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \Gamma(2-\gamma) \{-3 + 3 \cdot 2^\gamma - 3^\gamma\}. \end{aligned}$$

I valori del rapporto $(T + P + P')/T$ riportati nella fig. 2 per $\gamma = 1,45$ mostrano che tale rapporto decresce tanto rapidamente al decrescere di α da non permettere tale misura.

4. - Conclusioni ed osservazioni.

La presente misura mostra che il rapporto R_p/R_e cresce leggermente al crescere di r , e l'aumento non è dovuto alla disposizione sperimentale dei contatori.

Per quanto gli errori statistici siano elevati sembra si possa ricavare: a) che

l'aumento del rapporto R_p/R_e al crescere di r riscontrato in questa misura sia inferiore a quello riscontrato nella precedente misura II. Ciò mostra che nella misura II l'aumento del rapporto R_p/R_e era in parte attribuibile all'errore sistematico introdotto; b) che l'aumento fra 25 e 55 m sia maggiore dell'aumento fra 2,5 e 25 m, d'accordo con quanto si notava nella misura II. Anche dai risultati della misura I sembra poter ricavare che l'aumento del rapporto Δ_p/Δ_e fra 48 e 96 m sia maggiore dell'aumento dello stesso rapporto fra 5 e 48 m.

I risultati delle misure di altri autori ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ mostrano che anche la componente N (protoni, neutroni di alta energia, mesoni π , ecc.) ⁽⁷⁾ decresce in numero col crescere della distanza dal centro dello sciame presso a poco come la componente molle. Tutto ciò indica che i mesoni e la componente N si possono ritenere prodotti negli sciami con un processo simile, qualitativamente, a quello degli elettroni (vedi ⁽⁵⁾).

La componente N alimenta lo sciame durante il suo sviluppo dando luogo nei processi di interazione alle particelle di minore energia che si trovano alla periferia dello sciame ⁽⁵⁾; essa inoltre produce durante il suo percorso, nel « core » dello sciame, altra componente N . K. GREISEN, W. D. WALKER e S. P. WALKER ⁽⁶⁾ mostrano che se si ammette che la produzione di componente N nel « core » dello sciame non decresca rapidamente col decrescere della quota s.l.d.m. (di modo che la produzione a basse quote non sia trascurabile rispetto alla produzione ad alta quota) si trova che la distribuzione laterale della componente N risulta approssimativamente simile a quella della componente molle ($f(r) \approx r^{-1}$). Questo risultato non varia se si pone, in via approssimativa $f(\theta) = \text{costante}$ per $\theta < K$ ed $f(\theta) = 0$ per $\theta > K$, essendo $f(\theta)$ la distribuzione angolare delle particelle emesse.

Il maggior contributo alle particelle che si trovano alla distanza r dal centro dello sciame risulta dovuto a particelle provenienti da quote (sopra il rivelatore) comprese fra r/K e $2r/K$.

Se ammettiamo che anche le particelle molli che si registrano alla distanza r dal centro di uno sciame provengano da una quota tanto più elevata sopra il sistema che le rivela quanto maggiore è la distanza fra questo e il centro dello sciame possiamo dedurre che all'aumento del rapporto R_p/R_e col crescere di r può contribuire il diverso assorbimento delle particelle molli e penetranti durante il percorso in aria. Assumendo per esempio per K un valore intorno a 1/10 di radiante, per $r = 55$ m risulta $r/K \div 2r/K = 550 \div 1100$ m e durante tale percorso l'assorbimento delle particelle molli non è trascurabile, dato che la lunghezza di radiazione in aria è 44 g/cm² equivalente a

⁽⁵⁾ G. COCCONI e V. TONGIORGI COCCONI: *Phys. Rev.*, **79**, 730 (1950).

⁽⁶⁾ K. GREISEN, W. D. WALKER e S. P. WALKER: *Phys. Rev.*, **80**, 535 (1950).

⁽⁷⁾ B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

342 m di aria al l.d.m. ⁽⁶⁾ e che gli elettroni che si trovano alla periferia dello sciame hanno energia dell'ordine dell'energia critica, mentre l'assorbimento della componente mesonica (per cui la lunghezza di assorbimento è 2 000 g/cm²) si può ritenere ancora trascurabile anche in percorsi molto maggiori.

Ciò è coerente con quanto fa osservare COCCONI ⁽⁸⁾, che cioè gli sciami estesi dell'aria non sono un evento speciale, ma piuttosto l'unico processo in cui viene prodotta la radiazione cosmica presente nella bassa atmosfera: col crescere della distanza r dal centro dello sciame la percentuale di particelle penetranti diviene via via più abbondante appunto perchè meno assorbita delle particelle molli; per questo, a distanze ancora maggiori diviene incoerente con la componente molle e costituisce la percentuale più abbondante della radiazione cosmica totale al livello del mare.

I valori di r implicati nella presente misura, come nelle misure I e II non sono però ancora abbastanza grandi perchè l'effetto di assorbimento possa assumere un'importanza elevata, ed una differenza nella distribuzione laterale delle particelle molli e penetranti potrebbe dipendere dalla differenza nella distribuzione angolare $f(\theta)$, differenza che può essere notevole dato che i processi di emissione sono molto diversi.

Ringrazio il prof. GIUSEPPE COCCONI per una utile discussione su questo argomento.

⁽⁸⁾ L. JANOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1948), p. 205.

⁽⁹⁾ G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **79**, 1006 (1950).

SUMMARY

The lateral structure of extensive cosmic rays air showers is studied at Catania (elevation 35 m o. s. l.) by means of G.M. counters by selecting showers with average density of ≈ 25 particles/m² in the vicinity of the cores of the showers. The ratio $R_p/R_e =$ = density of the penetrating particles at a distance r from the core of the shower/density of the total component at a distance r from the core of the shower, is found to increase slowly with r . It is excluded that this increase is due to the experimental disposition of the counters.

Physical Applications of the Resolvent Operators (I). On the Mathematical Formalism of Feynman's Theory of the Positron.

M. SCHÖNBERG

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 14 Giugno 1951)

Summary. — The resolvent operators of the theory of linear functional equations are applied to the quantum formalism in general and more specially to the Feynman formulation of the hole theory. A generalization of the resolvent operators is given in order to treat problems with time dependent hamiltonians. It is shown that Feynman's formulation amounts to consider divergent waves for the positive kinetic energies and convergent waves for the negative kinetic energies, in the propagation kernel. Expansions of the propagation kernels are derived from the resolvent, without using Feynman's integral equation which leads to difficulties. A relativistically invariant resolvent is defined in the theory of quantized interacting fields. An operator related to the resolvent describes a new kind of collision which can be used in the theory of the ground state of atomic nuclei.

Introduction.

1. — The resolvent operator $(A - \lambda)^{-1}$, λ being a complex numerical parameter and A a linear operator, plays a central part in the mathematical theory of the linear operators and linear functional equations. Stone's theory of the linear transformations in Hilbert space ⁽¹⁾ is largely based on the use of the resolvent operator, as had been many other important developments of the linear analysis ^(2,3). Nevertheless the resolvent operator is seldom used

⁽¹⁾ M. H. STONE: *Linear transformations in Hilbert space* (New York, 1932).

⁽²⁾ F. RIESZ: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).

⁽³⁾ E. HELLINGER und O. TOEPLITZ: *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, « Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften » vol. 3^o (Leipzig, 1927).

in quantum mechanics, although it is the most adequate instrument for the discussion of many important problems. Recently KATO ⁽⁴⁾ applied the resolvent operator to the quantum theory of perturbations. The theory of scattering of SOMMERFELD ⁽⁵⁾ and MEIXNER ⁽⁶⁾, in which the Green functions of the stationary Schrödinger and Dirac equations play the central part, is actually an application of the resolvent operator to the quantum theory of scattering, since the Green functions considered by SOMMERFELD and MEIXNER are essentially matrix elements of operators closely related to the resolvent attached to the hamiltonian. The results of SOMMERFELD and MEIXNER can be easily extended to much more general cases than those considered by these authors, once their Green functions are replaced by resolvent operators and the relations between these resolvents and the unitary operators of the motion (contact transformation generated by the hamiltonian) are taken into account. We shall indicate the main points involved in such a generalization in this paper, but the detailed theory will be given elsewhere, the main objective of this paper being the application of the resolvent operators to Feynman's theory of the positron ⁽⁷⁾.

In sections 2, 3 and 4 we derive the main properties of the resolvent, from the point of view of the application to quantum theory, for the case of time independent hamiltonians. The treatment of the case of time dependent hamiltonians requires an extension of the definition of the resolvent operators, which is given in section 7. The generalized resolvent operators depend on a complex parameter λ and also on a time variable t' . The generalized resolvents are Laplace transforms of the unitary operator of the motion. In the case of a time independent hamiltonian, our generalized resolvents are also time independent and they coincide with the ordinary resolvents. The consideration of the generalized resolvents shows that the resolvents are more closely related to the contact transformations generated by the motion during finite time intervals than to the infinitesimal contact transformations described by the hamiltonian. It would be possible to introduce resolvents even in cases in which there is no hamiltonian.

In the case of a time independent hamiltonian, it is possible to consider a single valued resolvent $(H - \lambda)^{-1}$, by cutting the complex λ -plane along the continuous spectrum of the hamiltonian H . The resolvent $R(\lambda)$ is actually a multiple valued function of λ , which has some similarities with the loga-

⁽⁴⁾ T. KATO: *Prog. Theor. Phys.*, **4**, 514 (1949); **5**, 95 and 207 (1950).

⁽⁵⁾ A. SOMMERFELD: *Ann. d. Phys.*, **11**, 257 (1931); *Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.*, **21**, 309 (1913).

⁽⁶⁾ J. MEIXNER: *Math. Zeits.*, **36**, 677 (1933); *Zeits. f. Phys.*, **90**, 312 (1934); *Ann. d. Phys.*, **29**, 97 (1937).

⁽⁷⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949).

rithmic function, and which is rendered single valued by the cut in the λ -plane. It is nevertheless preferable to consider two branches $R_{\pm}(\lambda)$ of the multiple valued resolvent, which are Laplace transforms of the unitary operator of the motion. These two branches play an important part in the theory of the scattering as well as in the theory of the positron. In the case of a time dependent hamiltonian, those two branches of the resolvent present themselves directly, whereas the definition of the single-valued resolvent is somewhat artificial. The two branches of the resolvent correspond to different behaviours of the scattered waves, at infinity, in the theory of scattering: waves diverging or converging at infinity (positive or negative sources). The use of the resolvent in Feynman's treatment of the hole theory shows immediately that the waves of negative energy are taken as convergent, whilst the positive energy ones are taken as divergent, in the usual way. The appearance of negative energy particles moving backwards in time corresponds actually to the assimilation of a convergent wave to a divergent one. This interpretation of Feynman's procedure shows that it may be possible to give a plausible interpretation to negative energy particles, even without using the Pauli exclusion principle, by choosing adequate solutions of the wave equations.

The use of the resolvents not only indicates more clearly the essential points in the Feynman theory of the positron but it leads also to a more rigorous mathematical formulation. In Feynman's treatment there is an integral equation for the singular function $K_{+}^{(A)}(x, x')$, which is used to define it in the general case, and also to get its expansion in terms of the external field and the corresponding singular function for free electrons (the general definition of $K_{+}^{(A)}$ can be easily obtained from the second quantization form of the hole theory and is implicitly contained in the analysis given in the appendix of Feynman's paper). It is shown in this paper that Feynman's integral equation is not satisfactory, although it is useful for a perturbation treatment. By means of the resolvents it is possible to get easily expansions for the Feynman singular function. The influence of the closed stationary states on the convergence of the expansion of the singular function is clearly shown by our method of expansion, a point which can not be easily investigated with Feynman's methods.

Instead of Feynman's $K_{+}^{(A)}$ we use an operator $V_F(t, t')$ depending on two time variables, whose matrix elements are simply expressed in terms of $K_{+}^{(A)}(x, x')$. The relativistic invariance of the formalism is not apparent when it is expressed in terms of $V_F(t, t')$, but there are several advantages in using $V_F(t, t')$, which is an effective operator. We show that $V_F(t, t')$ can be expressed directly in terms of the unitary operator of the motion $V(t, t')$, as a kind of complex Stieltjes transform. The Stieltjes transform plays also an important part in the case of time independent hamiltonians, because the resolvent (rendered single valued by the cut in the λ -plane) is a Stieltjes

transform of the projection operator $P(E)$ of the continuous spectrum of H .

We shall not discuss the hole theory in second quantization, in this paper. This will be done in a following paper, in which we shall determine the resolvent of the interacting electron-positron and electromagnetic quantized fields. In the case of fields, it is possible to introduce a relativistically invariant resolvent depending on a complex parameter λ and a space-like surface in space-time σ' , as it is shown in section 9.

By means of the resolvents $R_+(\lambda)$ and $R_-(\lambda)$ it is possible to form an operator $R_s(\lambda) = (1/2)[R_+(\lambda) + R_-(\lambda)]$, which is not a branch of the multiple valued resolvent but which can be used to get special solutions of the Schrödinger equation in the theory of collisions. The kind of collisions described by $R_s(\lambda)$ is altogether different from those considered in the theory of scattering: in these collisions there is a reflecting boundary at infinity, and the solution of the stationary Schrödinger equation is formed by the superposition of outgoing and reflected ingoing waves. This kind of collision can be used in the theory of the nucleus as a rough approximation, the nuclear boundary being assimilated to the reflecting wall at infinity, in order to explain why the mean free path of the nucleons is so big, although the cross-section for non-enclosed nucleons is large. Whereas in classical theory there is a single type of collisions, once the interaction is given, the same is not true in quantum mechanics, because of the influence of the boundary conditions on the nature of the wave-functions. Operators similar to $R_s(\lambda)$ were already introduced by SCHÖNBERG (*) in the quantum theory of perturbations, for real values of λ . The theory of the enclosed collisions will be given elsewhere.

The resolvent operator $R(\lambda)$.

2. — We shall consider a dynamical system whose hamiltonian H has a mixed spectrum, the discrete and continuous parts of the spectrum having no common points. The resolvent operator $R(\lambda)$ will be taken as the inverse of $H - \lambda$, for complex or real values of λ not belonging to the spectrum of H

$$(1) \quad R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1}.$$

We shall of course take H hermitian, so that the spectrum will consist only of real values. The discrete eigenvalues will be denoted by E_k and the corresponding eigenvectors of H in functional space by Φ_k . In all cases of physical interest there is an infinite degeneracy of the levels of the continuous

(*) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 403 (1951).

spectrum and we shall introduce variables θ which characterize the eigenvectors $\Phi_{E,\theta}$ of the continuous spectrum

$$(2) \quad H\Phi_k = E_k\Phi_k, \quad H\Phi_{E,\theta} = E\Phi_{E,\theta}.$$

The wave functions, in a representation defined by a complete set of commutable operators ξ_{op} , are functions $\bar{\Phi}_k(\xi)$ and $\bar{\Phi}_{E,\theta}(\xi)$ of the eigenvalues ξ of the ξ_{op} . We shall assume that the eigenfunctions (or eigenvectors) are normalized in the usual way

$$(3a) \quad \int \bar{\Phi}_{E,\theta}^*(\xi) \bar{\Phi}_{E',\theta'}(\xi) d\xi = \delta(E - E') \delta(\theta - \theta'),$$

$$(3b) \quad \int \bar{\Phi}_{E,\theta}^*(\xi) \bar{\Phi}_k(\xi) d\xi = 0,$$

$$(3c) \quad \int \bar{\Phi}_k^*(\xi) \bar{\Phi}_{k'}(\xi) d\xi = \delta_{kk'}.$$

Some of the ξ_{op} may have discrete spectra (spins, isotopic spins, etc.) and the corresponding integrations must be taken as ordinary sums. We treated the θ as continuous variables, in equation (3a), but some or all of them may be discrete and the corresponding deltas Kronecker ones, instead of Dirac functions. We shall assume, for the sake of simplicity, that the discrete levels are not degenerate, unless the opposite is specified. Most of our results are independent of that assumption.

We shall now introduce the projection operators P corresponding to the eigenvectors of H

$$(4) \quad \begin{cases} P_k \chi = (\Phi_k, \chi) \Phi_k, \\ P_{E,\theta} \chi = (\Phi_{E,\theta}, \chi) \Phi_{E,\theta}, \end{cases}$$

χ being an arbitrary vector of the functional space in consideration and (Φ, χ) denoting the inner product of the vectors Φ and χ . It is convenient to introduce the projection operators $P(E)$ attached to the linear sub-spaces of the eigenvectors corresponding to the eigenvalues E (see reference 8)

$$(5) \quad P(E) = \int P_{E,\theta} d\theta.$$

When the eigenvalue E_k is degenerate, we shall take

$$(5a) \quad P_k = \sum_{\alpha} P_{k,\alpha},$$

the $P_{k,\alpha}$ being the projection operators corresponding to the various eigenvectors $\Phi_{k,\alpha}$ with the same energy E_k .

We shall use often the following properties of the P

$$(6) \quad \sum_k P_k + \int_{\text{sp.}} P(E) dE = 1,$$

$$(7) \quad \begin{cases} P_k P_{k'} = P_k \delta_{kk'}, & P(E) P(E') = \delta(E - E') P(E), \\ P_k P_{E,\theta} = 0, & P_{E,\theta} P_{E',\theta'} = P_{E,\theta} \delta(E - E') \delta(\theta - \theta'). \end{cases}$$

The θ may be considered as eigenvalues of operators θ_{op} commutable with H . The spectral decomposition of H is

$$(8) \quad H = \sum_k E_k P_k + \int_{\text{sp.}} E P(E) dE.$$

The spectral decomposition of an arbitrary function of H is

$$(9) \quad F(H) = \sum_k F(E_k) P_k + \int_{\text{sp.}} (F) E P(E) dE.$$

In particular, we have for the resolvent $R(\lambda)$

$$(10) \quad R(\lambda) = \sum_k (E_k - \lambda)^{-1} P_k + \int_{\text{sp.}} (E - \lambda)^{-1} P(E) dE.$$

The matrix elements of $R(\lambda)$ are functions of λ with simple poles at the discrete eigenvalues of H . We may say that $R(\lambda)$ has simple poles at the points E_k of the complex λ -plane.

It results from equations (9) and (10) that

$$(11) \quad F(H) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} - \int_{-\infty - i\eta}^{+\infty - i\eta} \right) F(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \\ (\varepsilon, \eta > 0),$$

provided the function $F(\lambda)$ is regular in the belt of the λ -plane between the straight-lines $i\varepsilon \pm \infty$ and $-i\eta \pm \infty$. In particular we have

$$(12) \quad \exp[-iHt] = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} - \int_{-\infty - i\eta}^{+\infty - i\eta} \right) \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda.$$

We shall assume that the units are chosen in such a way that the Planck constant has the value 2π , and we shall introduce the following notation

$$(13) \quad V(t) = \exp[-iHt], \quad (\hbar = 1)$$

$V(t)$ is the unitary operator of the movement

$$(14) \quad \psi(t) = V(t - t_0)\psi(t_0);$$

$\psi(t)$ being the state vector of the dynamical system in consideration

$$(15) \quad i \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t).$$

$V(t)$ is determined by the equations

$$(16) \quad i \frac{d}{dt} V(t) = HV(t); \quad V(0) = 1.$$

We shall now simplify (12) by taking into account the identities

$$(17a) \quad \int_{-\infty + i\epsilon}^{+\infty + i\epsilon} \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda = 0, \quad (t < 0),$$

$$(17b) \quad \int_{-\infty - i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda = 0, \quad (t > 0).$$

To establish (17a), we close the integration path with a half-circle of infinite radius with center at the origin, lying in the upper part of the complex λ -plane, and apply the Cauchy residue theorem. We get (17b) in a similar way, by closing the integration path with a half-circle in the lower part of the λ -plane. It results from (12) and (17) that

$$(18) \quad \begin{cases} V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\epsilon}^{+\infty + i\epsilon} \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda, & (t > 0), \\ V(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda, & (t < 0). \end{cases}$$

The operators

$$(19) \quad V_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pm i\epsilon - \infty}^{\pm i\epsilon + \infty} \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda,$$

are solutions of the inhomogeneous equation

$$(20) \quad i \frac{d}{dt} V_{\pm}(t) - HV_{\pm}(t) = i\delta(t),$$

since

$$(21) \quad V_{\pm}(t) = \pm \eta(\pm t) V(t),$$

with

$$(22) \quad \eta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

It is easily seen that

$$(23) \quad R(\lambda) = \begin{cases} i \int_0^{\infty} \exp[i\lambda t] V(t) dt & (Im\lambda > 0), \\ -i \int_{-\infty}^0 \exp[i\lambda t] V(t) dt & (Im\lambda < 0), \end{cases}$$

hence

$$(24a) \quad R(\lambda) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] V_+(t) dt, \quad (Im\lambda > 0)$$

$$(24b) \quad R(\lambda) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] V_-(t) dt, \quad (Im\lambda < 0)$$

and

$$(24c) \quad R(E + i0) + R(E - i0) = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iEt] V_s(t) dt, \quad (ImE = 0)$$

with

$$(25) \quad V_s(t) = \frac{1}{2} [V_+(t) + V_-(t)].$$

We have

$$(26) \quad V_+(0+) = -V_-(0-) = 1, \quad V_+(0-) = V_-(0+) = 0,$$

hence

$$(27) \quad V_+(0+) + V_-(0-) = 1, \quad V_-(0+) + V_+(0-) = -1,$$

and

$$(28) \quad V_+(0) = \frac{1}{2}, \quad V_-(0) = -\frac{1}{2}, \quad V_s(0) = 0.$$

Equation (21) will also be valid for $t = 0$, if we take

$$(29) \quad \eta(0) = \frac{1}{2}.$$

The relation between V_s and V is

$$(30) \quad V_s(t) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) V(t),$$

with

$$(31) \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0. \end{cases}$$

We shall now discuss the nature of the singularity of $R(\lambda)$ at the points of the real axis belonging to the continuous spectrum of H . Let us consider the operator $\text{p.v.}(H - E)^{-1}$, E being real

$$(32a) \quad \text{p.v.}(H - E)^{-1} = R(E) \text{ (when } E \text{ does not belong to the spectrum of } H)$$

$$(32b) \quad \text{p.v.}(H - E_k)^{-1} = \sum_{l \neq k} (E_l - E_k)^{-1} P_l + \int_{\text{sp.}} (E - E_k)^{-1} P(E) dE,$$

$$(32c) \quad \text{p.v.}(H - E)^{-1} = \sum_k (E_k - E)^{-1} P_k + \text{p.v.} \int_{\text{sp.}} (E' - E) P(E') dE',$$

(E belonging to the continuous spectrum of H). In the right hand side of (32c) p.v. denotes the Cauchy principal value of the integral. In order to compute $R(E + i0)$, E being a point of the continuous spectrum, we shall indent the integration path in (10) at the point E with an infinitesimal half-circle centered at E and lying in the lower part of the complex E -plane. Thus we get

$$(33a) \quad R(E + i0) = \text{p.v.}(H - E)^{-1} + i\pi P(E).$$

By indenting with an infinitesimal half-circle lying in the upper part of the E -plane, we get

$$(33b) \quad R(E - i0) = \text{p.v.}(H - E)^{-1} - i\pi P(E),$$

hence

$$(34) \quad R(E + i0) - R(E - i0) = 2\pi i P(E).$$

The operator $R(\lambda)$ has a discontinuity $2\pi i P(E)$ at any point E of the con-

tinuous spectrum of H . The operator $R(\lambda)$ may be considered as a branch of a multiple valued operator function of a complex variable λ , which is obtained by cutting the complex λ -plane along the continuous spectrum of H , provided the continuous spectrum does not stretch from $-\infty$ to $+\infty$.

It results from equation (34) that

$$(35) \quad \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{E'+i\varepsilon}^{E''+i\varepsilon} - \int_{E'-i\varepsilon}^{E''-i\varepsilon} \right) F(\lambda) R(\lambda) d\lambda = \sum_{E' < E_k < E''} F(E_k) P_k + \int_{E' \leq E \leq E''} F(E) P(E) dE$$

(ε infinitesimal),

E' and E'' being two real numbers not belonging to the discrete spectrum of H , and $F(\lambda)$ a function which is regular in a region of the λ -plane including the segment $E'E''$ of the real axis. Equation (35) leads to a generalization of (11)

$$(36) \quad \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{E'+i\varepsilon}^{E''+i\varepsilon} - \int_{E'-i\eta}^{E''-i\eta} \right) F(\lambda) R(\lambda) d\lambda = \sum_{E' < E_k < E''} F(E_k) P_k + \int_{E' \leq E \leq E''} F(E) P(E) dE.$$

($\varepsilon, \eta > 0$);

ε and η must be infinitesimal, in order that the segments $(E' + i\varepsilon, E'' + i\varepsilon)$ and $(E' - i\eta, E'' - i\eta)$ be assimilable to a closed path.

In the case of a pure continuous spectrum, $R(\lambda)$ may be considered as a Stieltjes transform of $P(E)$. Equation (34) corresponds to the Stieltjes formula for the inversion of the Stieltjes transformation. Equations (23) show that $R(\lambda)$ is a Laplace transform of $V(t)$ and equations (18) give actually the inversion of that Laplace transformation.

Equation (11) gives a generalization for operators of the Cauchy formula

$$(37) \quad F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z - \lambda} dz,$$

C being a closed path described in the positive sense and containing the point λ .

The operators $R_+(\lambda)$ and $R_-(\lambda)$.

3. — We shall now consider the resolvent $R(\lambda)$ as a multiple valued operator and define two of its branches $R_+(\lambda)$ and $R_-(\lambda)$. Let us introduce a cut in the λ -plane along the continuous spectrum of H and define a single valued

operator $R(\lambda)$, as we did in section 2. We shall take

$$(38) \quad \begin{cases} R_+(\lambda) = R(\lambda), & \text{Im} \lambda < 0, \\ R_-(\lambda) = R(\lambda), & \text{Im} \lambda > 0, \end{cases}$$

and define $R_+(\lambda)$ in the lower part of the λ -plane, and $R_-(\lambda)$ in its upper part, by analytical continuation across the continuous spectrum of H . Assuming that the $P(E)$ can be prolonged outside the real axis and that the operators $P(\lambda)$ thus obtained are single valued, we will get well defined operators $R_+(\lambda)$ and $R_-(\lambda)$

$$(39) \quad \begin{cases} R_+(\lambda) = R(\lambda) + 2\pi i P(\lambda), & (\text{Im} \lambda < 0), \\ R_-(\lambda) = R(\lambda) - 2\pi i P(\lambda), & (\text{Im} \lambda > 0), \end{cases}$$

We have everywhere in the λ -plane

$$(40) \quad R_+(\lambda) - R_-(\lambda) = 2\pi i P(\lambda).$$

It follows from (38) and (39) that

$$(41) \quad (H - \lambda)R_{\pm}(\lambda) = 1,$$

hence

$$(42) \quad \int \langle \xi' | H - \lambda | \xi \rangle d\xi \langle \xi | R_{\pm}(\lambda) | \xi'' \rangle = \delta(\xi' - \xi'').$$

Equation (42) shows that the matrix elements of $R_{\pm}(\lambda)$ are Green functions of the stationary Schrödinger equation. In the special case of a particle moving in a field of force described by a potential $U(\mathbf{x})$, the Green functions $\langle \mathbf{x} | R_+(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle$ and $\langle \mathbf{x} | R_-(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle$ correspond respectively to a positive or a negative source (outgoing and ingoing waves) situated at the point \mathbf{x}_0 . Indeed, the asymptotic value of $\langle \mathbf{x} | R_+(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle$ can be computed by using the first equation (23)

$$(43) \quad \langle \mathbf{x} | R_+(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle_{\text{asy.}} \sim i \int_0^{\infty} \exp[i\lambda t] \left\langle \mathbf{x} \left| \exp \left[-\frac{it\mathbf{p}^2}{2m} \right] \right| \mathbf{x}_0 \right\rangle dt,$$

m being the mass of the particle and \mathbf{p}^2 the operator representing the square of the momentum of the particle. Using well known formulae we get

$$(44) \quad \begin{aligned} \left\langle \mathbf{x} \left| \exp \left[-\frac{it\mathbf{p}^2}{2m} \right] \right| \mathbf{x}_0 \right\rangle &= \exp \left[\frac{it}{2m} \Delta \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{it}{2m} \varrho^2 \right] \exp [i(\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\})] d\mathbf{p}, \end{aligned}$$

hence

$$(45) \quad \langle \mathbf{x} | R_+(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle_{\text{asy.}} \sim \frac{2m}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i(\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\})}{p^2 - k^2} \right] d\mathbf{p} \\ = \frac{m \exp(i k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad \left(\lambda = \frac{k^2}{2m} \right).$$

In a similar way we get

$$(46) \quad \langle \mathbf{x} | R_-(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle_{\text{asy.}} \sim \frac{m \exp[-i k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|]}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Taking the source at infinity, we get the wave functions which describe the scattering (incoming plane wave plus diffused waves) as the matrix elements $\langle \mathbf{x} | R_+(E) | -\mathbf{k} \infty \rangle$ (Sommerfeld's treatment of the scattering⁽⁵⁾), \mathbf{k} being the momentum of the incident particles and $E = k^2/2m$ their energy.

The operator

$$(47) \quad R_s(\lambda) = \frac{1}{2} [R_+(\lambda) + R_-(\lambda)]$$

is also a solution of equation (41), and its matrix elements are also Green functions of the stationary Schrödinger equation. In the case of a particle moving in a field of force, the matrix elements of $R_s(\lambda)$ are the Green functions corresponding to point sources, with a reflecting wall at infinity

$$(48) \quad \langle \mathbf{x} | R_s(\lambda) | \mathbf{x}_0 \rangle_{\text{asy.}} \sim \frac{m \cos(k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

In many cases $P(\lambda)$ is an integral function of λ , so that both $R_+(\lambda)$ and $R_-(\lambda)$ have simple poles at the points of the discrete spectrum of H . It results from (40) that

$$(49) \quad \langle \xi' | R_+(E) | \xi'' \rangle - \langle \xi' | R_-(E) | \xi'' \rangle = 2\pi i \int d\theta \bar{\Phi}_{E,\theta}(\xi') \bar{\Phi}_{E,\theta}^*(\xi''),$$

since

$$(50) \quad \langle \xi' | P_{E,\theta} | \xi'' \rangle = \bar{\Phi}_{E,\theta}(\xi') \bar{\Phi}_{E,\theta}^*(\xi'').$$

When the eigenvalues are not degenerate (49) becomes

$$(51) \quad \langle \xi' | R_+(E) | \xi'' \rangle - \langle \xi' | R_-(E) | \xi'' \rangle = 2\pi i \bar{\Phi}_E(\xi') \bar{\Phi}_E^*(\xi'').$$

In this case, we can express the normalized eigenfunction $\bar{\Phi}_E(\xi')$ in terms of the matrix elements of the operators $R_{\pm}(E)$, by keeping the ξ'' constant

$$(52) \quad \bar{\Phi}_E(\xi') = [\langle \xi' | R_+(E) | \xi'' \rangle - \langle \xi' | R_-(E) | \xi'' \rangle] (2\pi i \bar{\Phi}_E^*(\xi''))^{-1}.$$

The difference of the matrix elements of R_+ and R_- , in (52), is a non normalized eigenfunction. It results from (10) that

$$(53) \quad P_k = -\text{Residue}_{\lambda=E_k} R(\lambda),$$

hence

$$(54) \quad \sum_{\alpha} \bar{\Phi}_{k,\alpha}(\xi') \bar{\Phi}_{k,\alpha}^*(\xi'') = -\text{Residue}_{\lambda=E_k} \langle \xi' | R(\lambda) | \xi'' \rangle.$$

In the particular case of a non degenerate discrete level, the residue of the matrix element $\langle \xi' | R(\lambda) | \xi'' \rangle$ is a non normalized eigenfunction of energy E_k , considered as a function of ξ' , since

$$(55) \quad \bar{\Phi}_k(\xi') = -\text{Residue}_{\lambda=E_k} \langle \xi' | R(\lambda) | \xi'' \rangle (\bar{\Phi}_k^*(\xi''))^{-1}.$$

4. - Equation (40) is obviously a generalization of (34), since

$$(56) \quad R(E + i0) = R_+(E), \quad R(E - i0) = R_-(E).$$

In order to get a generalization of equations (33), we shall use the following relation

$$(57) \quad R_s(E) = \text{p.v.} (H - E)^{-1},$$

which is a consequence of the definition of R_s

$$(58) \quad \begin{aligned} R_s(E) &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(E + i\varepsilon) + R(E - i\varepsilon)] = \sum_k (E_k - E)^{-1} P_k + \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{sp.}} \left(\frac{1}{E' - E - i\varepsilon} + \frac{1}{E' - E + i\varepsilon} \right) P(E') dE' = \\ &= \text{p.v.} \int_{\text{sp.}} \frac{P(E')}{E' - E} dE' + \sum_k (E_k - E)^{-1} P_k = \text{p.v.} (H - E)^{-1}. \end{aligned}$$

The generalization of equations (33) is given by the following ones

$$(59) \quad R_+(\lambda) = R_s(\lambda) + i\pi P(\lambda), \quad R_-(\lambda) = R_s(\lambda) - i\pi P(\lambda),$$

which are equivalent to (40)-(47).

Equations (33) were derived by deformation of the integration path in

equation (10). It is also possible to get them in a different way

$$\begin{aligned}
 (60) \quad R(E + i0) - R(E - i0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(E + i\varepsilon) - R(E - i\varepsilon)] = \\
 &= \lim_{\varepsilon > 0} \sum_k \frac{2i\varepsilon P_k}{(E_k - E)^2 + \varepsilon^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{sp.}} \frac{2i\varepsilon}{(E' - E)^2 + \varepsilon^2} P(E') dE' = \\
 &= 2\pi i \sum_k P_k \delta(E - E_k) + 2\pi i P(E) = 2\pi i P(E),
 \end{aligned}$$

taking into account the well known relation

$$(61) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x - a).$$

It results from (9) that

$$(62) \quad V(t) = \sum_k \exp[-iE_k t] P_k + \int_{\text{sp.}} \exp[-iE' t] P(E') dE',$$

$$(63) \quad V_s(t) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) \left[\sum_k \exp[-iE_k t] P_k + \int_{\text{sp.}} \exp[-iE' t] P(E') dE' \right],$$

hence

$$(64) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iEt] V(t) dt = 2\pi P(E),$$

$$(65) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} i \exp[iEt] V_s(t) dt = \text{p.v. } (H - E)^{-1}.$$

Equation (64) is equivalent to (34), because

$$(66) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} i \exp[iEt] V(t) dt = R(E + i0) - R(E - i0),$$

as a consequence of (23). We get from (65) and (58) a formula equivalent to (24c)

$$(67) \quad R_s(E) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iEt] V_s(t) dt.$$

We get from (24a) and (24b) formulae corresponding to (67)

$$(68) \quad R_{\pm}(E) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iEt] V_{\pm}(t) dt.$$

The inverse formulae can be obtained easily from (19) by a deformation of the integration paths

$$(69) \quad V_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iEt] R_{\pm}(E) dE \pm \frac{1}{2} \sum_k \exp[-iE_k t] P_k.$$

Application of the operator $R(\lambda)$ to the Feynman theory of the positron.

5. — Let H be the hamiltonian of an electron in a time independent electromagnetic field (relativistic theory). We shall assume that there are discrete levels in the interval $(0 - mc^2)$ and a continuous spectrum covering the intervals $(-\infty - mc^2)$ and $(mc^2 - \infty)$, m being the rest-mass of the electron. In Feynman's treatment of the hole theory, the operator $V_+(t)$ is replaced by another operator $V_F(t)$

$$(70) \quad V_F(t) = \eta(t) \left[\int_{mc^2}^{\infty} \exp[-iEt] P(E) dE + \sum_k \exp[-iE_k t] P_k \right] - \\ - \eta(-t) \int_{-\infty}^{-mc^2} \exp[-iEt] P(E) dE,$$

which satisfies the same differential equation as $V_+(t)$

$$(71) \quad i \frac{d}{dt} V_F(t) - H V_F(t) = i \delta(t).$$

It is easily seen that $V_F(t)$ can be represented by a contour integral involving $R(\lambda)$

$$(72) \quad V_F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[-i\lambda t] R(\lambda) d\lambda.$$

C being the path represented in fig. 1, when 0 is not a singular point of $R(\lambda)$. Formula (72) is a generalization of that given by Feynman for the case of

free electrons. To prove the equivalence of (72) and (70), we close the integration path with an infinite half circle in the lower or the upper part of the λ -plane, for $t > 0$ and $t < 0$ respectively, and apply the Cauchy residue theorem.

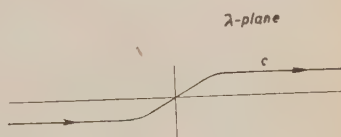


Fig. 1.

It results from (72) that

$$(73) \quad V_F(t) = \frac{1}{2} \eta(t) \sum_k \exp[-iE_k t] P_k + \\ + \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_0^\infty \exp[-iEt] R_+(E) dE + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \exp[-iEt] R_-(E) dE.$$

Since the operators R_+ and R_- correspond respectively to divergent and convergent waves, we see that in Feynman's prescription the waves of negative energy are taken as convergent and those of positive energy as divergent. Thus we get an intuitive picture, instead of Feynman's idea of positrons as electrons moving backwards in time, which is mathematically expressed by the Fourier expansion (70).

Feynman's relativistic singular function $K_+^{(A)}(x, x')$ is easily expressed in terms of the matrix elements of $V_F(t - t')$

$$(74) \quad K_+^{(A)}(x, x') = \langle \mathbf{x} | V_F(t - t') | \mathbf{x}' \rangle \beta,$$

β being the well known operator of the Dirac theory of the electron. We get from (71) and (74) a differential equation for $K_+^{(A)}$ given by Feynman

$$(75) \quad \left[\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(x) \right) + im \right] K_+^{(A)}(x, x') = \delta_4(x - x'),$$

e being the charge of the electron (absolute value) and the A_μ the covariant components to the potentials. We are now assuming that $\hbar = 1$, $c = 1$ and

$$(76) \quad \gamma_0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = -1.$$

Equation (72) allows us to get easily an expansion of $V_F(t)$ by means of the following expansion of $R(\lambda)$

$$(77) \quad R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_0(\lambda) H']^n R_0(\lambda),$$

H_0 being the hamiltonian of a free electron, $H' = H - H_0$ and $R_0(\lambda)$ the resolvent of a free electron

$$(78) \quad R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1} = \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m + \lambda)}{p^2 + m^2 - \lambda^2}.$$

In order to derive (77) we shall use the following identity

$$(79) \quad R(\lambda) = (H_0 + H' - \lambda)^{-1} = [(H_0 - \lambda) \{1 + R_0(\lambda) H'\}]^{-1} = \\ = [1 + R_0(\lambda) H']^{-1} R_0(\lambda),$$

and expand the operator $[1 + R_0(\lambda)H']^{-1}$ in a Liouville-Neumann series

$$(80) \quad [1 + R_0(\lambda)H']^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_0(\lambda)H']^n.$$

Introducing (77) into (72), we get an expansion of $V_F(t)$ in powers of H'

$$(81) \quad V_F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp[-i\lambda t] [R_0(\lambda)H']^n R_0(\lambda) d\lambda.$$

The expansion of the matrix elements of V_F in the momentum representation is

$$(82) \quad \langle \mathbf{p} | V_F(t) | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\lambda \exp[-i\lambda t] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{p} | H' | \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_1 | H' | \mathbf{p}_2 \rangle \dots \langle \mathbf{p}_{n-1} | H' | \mathbf{p}' \rangle}{(p^2 + m^2 - \lambda^2)(p_1^2 + m^2 - \lambda^2) \dots (p_{n-1}^2 + m^2 - \lambda^2)} \times \\ \times [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + \beta m + \lambda][(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}_1) + \beta m + \lambda] \dots \times \\ \times [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}_{n-1}) + \beta m + \lambda][(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}') + \beta m + \lambda] \prod_{j=1}^{n-1} d\mathbf{p}_j.$$

The integration with respect to λ can be performed by the residue method. Thus we get

$$(83) \quad \langle \mathbf{p} | V_F(t) | \mathbf{p}' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} d\mathbf{p}_j \langle \mathbf{p} | H' | \mathbf{p}_1 \rangle \dots \langle \mathbf{p}_{n-1} | H' | \mathbf{p}' \rangle \times \\ \times \left[\sum_q \exp[-iE_q t] \frac{H_0(q) + \varepsilon(t)E_q}{2E_q} \prod_{q' \neq q} \frac{H_0(q') + \varepsilon(t)E_{q'}}{q'^2 - q^2} \right] \\ (q, q' = p, p_1, \dots, p')$$

$$(84) \quad E_q = \sqrt{q^2 + m^2}, \quad H_0(q) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q}) + \beta m.$$

Thus the use of the resolvent allows us to get easily an expansion of V_F . The validity of that expansion depends on the convergence of the Liouville-Neumann series (80), which is justified when the operator $[R_0(\lambda)H']$ is small compared to 1. It is easily seen that, when there are discrete levels in the spectrum of H , the use of the Liouville-Neumann series may be unsatisfactory, because

$$(85) \quad [1 + R_0(\lambda)H']^{-1} = [R_0(\lambda)(H - \lambda)]^{-1} = R(\lambda)(H_0 - \lambda),$$

and the operator in the right hand side is very large compared to 1 in the neighbourhood of the discrete eigenvalues of H .

FEYNMAN (?) obtained an expansion of $K_+^{(A)}(x', x'')$ from the integral equation

$$(86) \quad K_+^{(A)}(x', x'') = K_+^{(0)}(x', x'') + ie \int_{-\infty}^{+\infty} K_+^{(0)}(x', x''') \gamma'' A_\mu(x''') K_+^{(A)}(x''', x'') dx''',$$

$K_+^{(0)}(x', x'')$ being the $K_+^{(A)}$ for free electrons. This equation can be written even in the case of a time dependent electromagnetic field, and it was used by FEYNMAN to define $K_+^{(A)}(x', x'')$ in this general case. In the case of a time independent field, (86) is equivalent to the following equation,

$$(87) \quad V_F(t) = V_F^{(0)}(t) - i \int_{-\infty}^{+\infty} V_F^{(0)}(t - \tau) H' V_F(\tau) d\tau,$$

$V_F^{(0)}$ being the operator V_F for free electrons

$$(88) \quad V_F^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[-i\lambda t] R_0(\lambda) d\lambda.$$

Instead of (87), we may consider the following integral equation

$$(87a) \quad V_F(t) = V_F^{(0)}(t) - i \int_{-\infty}^{+\infty} V_F(t - \tau) H' V_F^{(0)}(\tau) d\tau,$$

which leads also to Feynman's expansion of the operator $V_F(t)$.

A formal solution of (87) can be obtained by the application of the method of successive approximations (Liouville-Neumann expansion), taking $V_F^{(0)}$ as the zero order approximation

$$(89) \quad V_F(t) = V_F^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_F^{(0)}(t - \tau_1) H' V_F^{(0)}(\tau_1 - \tau_2) H' \dots V_F^{(0)}(\tau_{n-1} - \tau_n) H' V_F^{(0)}(\tau_n) \prod_{j=1}^n d\tau_j.$$

This formula gives the Feynman expansion of $V_F(t)$, which is however not strictly equivalent to (81), as we shall see. Let us take new integration variables in (89)

$$(90) \quad t_j = \tau_j - \tau_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad t_n = \tau_n.$$

Each term in the expansion of $V_F(t)$ becomes now a convolution integral

$$(91) \quad V_F(t) = V_F^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_F^{(0)}(t - \sum_{j=1}^n t_j) H' V_F^{(0)}(t_1) \dots H' V_F^{(0)}(t_n) \prod_{l=1}^n dt_l.$$

Let us introduce the Fourier integral expansion of $V_F^{(0)}(t)$

$$(92) \quad V_F^{(0)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\lambda t] \mathcal{R}_0(\lambda) d\lambda,$$

$$(92a) \quad \mathcal{R}_0(\lambda) = \begin{cases} R_0(\lambda + i0) = R_{+,0}(\lambda), & \lambda > 0 \\ R_0(\lambda - i0) = R_{-,0}(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

We get from (91) and the well known properties of the Fourier transforms of convolution integrals the following expansion

$$(93) \quad V_F(t) = V_F^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\lambda t] \mathcal{R}_0(\lambda) H'^n(\lambda) d\lambda.$$

We can get immediately (93) from (81) by deforming the integration path C into the real axis, when such a deformation is permitted. We have seen that the expansion (77) of $R(\lambda)$ may not converge in the neighbourhood of the real axis, even when H' is a small perturbation. In such cases the deformation of the integration path C into the real axis is obviously not permitted and there is no equivalence between Feynman's expansion and (81). From the practical point of view, expansions of V_F are useful only to compute corrections of small order in H' , so that only the first terms of (81) and (89) are of interest and both expansions lead to the same results.

Strictly speaking, Feynman's integral equation is in general not true. Indeed, we get from (71) and the corresponding equation for $V_F^{(0)}(t)$, for $T > |t|$

$$(94) \quad -i \int_{-T}^{+T} V_F^{(0)}(t - \tau) H' V_F(\tau) d\tau = -i \int_{-T}^{+T} V_F^{(0)}(t - \tau) (H - H_0) V_F(\tau) d\tau = \\ = \int_{-T}^{+T} V_F^{(0)}(t - \tau) \left[\frac{d}{d\tau} V_F(\tau) - \delta(\tau) \right] d\tau + \int_{-T}^{+T} \left[\frac{d}{d\tau} V_F^{(0)}(t - \tau) + \delta(t - \tau) \right] V_F(\tau) d\tau = \\ = V_F(t) - V_F^{(0)}(t) + \int_{-T}^{+T} \frac{d}{d\tau} [V_F^{(0)}(t - \tau) V_F(\tau)] d\tau.$$

For the validity of Feynman's equation it is necessary and sufficient that

$$(95) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} [V_F^{(0)}(-T)V_F(T)] = \lim_{T \rightarrow \infty} [V_F^{(0)}(T)V_F(-T)],$$

but this condition is not fulfilled in general. We shall examine this point in section 6.

Feynman's integral equation corresponds to the following one for $V_{\pm}(t)$

$$(96) \quad \dot{V}_{\pm}(t) = V_{\pm,0}(t) - i \int_{-\infty}^{+\infty} V_{\pm,0}(t-\tau) \dot{H}' V_{\pm}(\tau) d\tau,$$

$$(97) \quad V_{\pm,0}(t) = \pm \eta(\pm t) \exp[-iH_0 t] = \pm \eta(\pm t) V_0(t).$$

Equation (96) is an immediate consequence of the following one

$$(98) \quad V(t) = V_0(t) - i \int_0^t V_0(t-\tau) H' V(\tau) d\tau,$$

which can be easily checked by derivation with respect to t . The condition which corresponds to (95) in the case of $V_{\pm}(t)$ is

$$(99) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} [V_{\pm,0}(-T)V_{\pm}(T)] = \lim_{T \rightarrow \infty} [V_{\pm,0}(T)V_{\pm}(-T)].$$

This condition is fulfilled, because both sides of (99) are equal to 0.

We shall see that it is possible to introduce quite easily the operator corresponding to $V_F(t)$ when the electromagnetic field acting on the electrons is time dependent, and that there is no need of Feynman's integral equation to derive an expansion for Feynman's operator, even in this more general situation.

6. - There is a very simple relation between the operators $V_F(t)$ and $V(t)$

$$(100) \quad V_F(t) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) V(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Indeed, we have

$$(101) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left[\sum_k \exp[-iE_k(t-\tau)] P_k - \right. \\ \left. + \int_{\text{s.p.}} \exp[-iE(t-\tau)] P(E) dE \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon(E_k) \exp[-iE_k t] P_k + \frac{1}{2} \int_{\text{s.p.}} \varepsilon(E) \exp[-iEt] P(E) dE.$$

since

$$(102) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\alpha\tau] \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon(\alpha).$$

By taking into account that the discrete levels are positive, we get

$$(103) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2} V(t) - \int_{E<0} \exp[-iEt] P(E) dE,$$

hence

$$(104) \quad \frac{1}{2} \varepsilon(t) V(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t-\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \\ = \eta(t) V(t) - \int_{E<0} \exp[-iEt] P(E) dE = V_F(t).$$

By taking as integration variable in (100) $\lambda = t - \tau$, we get

$$(105) \quad V_F(t) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) V(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\lambda) \frac{d\lambda}{t-\lambda}.$$

therefore

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} V(\lambda) \frac{d\lambda}{t-\lambda}, \quad (t > 0) \\ V_F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\eta}^{+\infty-i\eta} V(\lambda) \frac{d\lambda}{t-\lambda}, \quad (t < 0). \end{array} \right. \quad (\eta > 0)$$

By a suitable deformation of the integration pathes in equations (106), we see that

$$(107) \quad V_F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} V(\lambda) \frac{d\lambda}{t-\lambda},$$

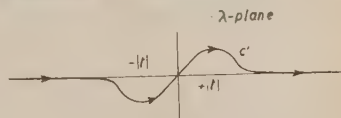


Fig. 2.

C' being the path represented in fig. 2.

It results from (105) that the condition (95) can be replaced by the following one

$$(108) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} [V_0(-T) V(T)] = \lim_{T \rightarrow \infty} [V_0(T) V(-T)].$$

Let us introduce the operator $U(t, t')$

$$(109) \quad U(t, t') = V_0(-t)V(t-t')V_0(t').$$

It is well known that the Heisenberg collision operator S is given by $U(\infty, -\infty)$

$$(110) \quad S = U(\infty, -\infty) = U(\infty, 0)U(0, -\infty) = U(\infty, 0)U^{-1}(-\infty, 0).$$

Since (108) means that

$$(111) \quad U(\infty, 0) = U(-\infty, 0),$$

we should have for the Dirac equation with any time independent electromagnetic field

$$(112) \quad S = 1,$$

and this is obviously not true.

The generalized resolvent operator $R(\lambda, t')$.

7. - We shall consider now the more general case of a time dependent hamiltonian $H(t)$. The unitary operator of the motion $V(t, t')$ is defined by the equations

$$(113) \quad i \frac{d}{dt} V(t, t') = H(t)V(t, t'), \quad V(t', t') = 1,$$

or by the equivalent ones

$$(114) \quad -i \frac{d}{dt'} V(t, t') = V(t, t')H(t'), \quad V(t, t) = 1,$$

which are not a trivial consequence of (113), because $V(t, t')$ is no more a function of the difference $t - t'$, as in the case of a time independent hamiltonian. Instead of the $V_{\pm}(t)$ we have now the $V_{\pm}(t, t')$

$$(115) \quad V_{\pm}(t, t') = \pm \eta(\pm(t-t'))V(t, t'),$$

which satisfy the differential equations

$$(116a) \quad i \frac{d}{dt} V_{\pm}(t, t') - H(t)V_{\pm}(t, t') = i\delta(t-t'),$$

$$(116b) \quad -i \frac{d}{dt'} V_{\pm}(t, t') - V_{\pm}(t, t')H(t') = i\delta(t-t').$$

We shall denote by $\bar{R}_{\pm}(\lambda, t')$ the Laplace transforms of the $V_{\pm}(t, t')$

$$(117) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] V_{\pm}(t, t') dt.$$

Under quite general conditions $R_{+}(\lambda, t')$ will exist when $Im\lambda > A_{-}$, and $R_{-}(\lambda, t')$ will exist when $Im\lambda < A_{-}$, A_{+} and A_{-} being real constants, because $V(t, t')$ is an unitary operator. We shall take as generalized resolvent $R(\lambda, t')$

$$(118) \quad R(\lambda, t') = \begin{cases} \exp[-i\lambda t'] \bar{R}_{+}(\lambda, t') & Im\lambda > 0, A_{+}, \\ \exp[-i\lambda t'] \bar{R}_{-}(\lambda, t') & Im\lambda < 0, A_{-}. \end{cases}$$

When the hamiltonian H is time independent $R(\lambda, t') = R(\lambda)$.

The inversion of the Laplace transformation (117) is given by

$$(119) \quad V_{\pm}(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + iB_{\pm}}^{+\infty + iB_{\pm}} \exp[-i\lambda t] \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') d\lambda,$$

with

$$(119a) \quad B_{+} > A_{+}, \quad B_{-} < A_{-}.$$

It results from (114) and (117) that the operators $\bar{R}_{\pm}(\lambda, t')$ are determined by the following equations

$$(120) \quad -i \frac{d}{dt'} \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') H(t') - \exp[i\lambda t'],$$

$$(121) \quad \bar{R}_{+}(\lambda, \infty) = 0, \quad \bar{R}_{-}(\lambda, -\infty) = 0.$$

These operators are also determined by an integral equation which we shall now derive. Let us introduce the Fourier integral expansion of $H(t)$

$$(122) \quad H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega t] L(\omega) d\omega.$$

It is easily seen that

$$(123) \quad i \int_{t'}^{\infty} \exp[i\lambda t] \left[i \frac{d}{dt} V(t, t') \right] dt = \exp[i\lambda t'] + \lambda \bar{R}_{+}(\lambda, t'), \quad (Im\lambda > A_{+}),$$

and

$$\begin{aligned}
 (124) \quad & i \int_{t'}^{\infty} \exp[i\lambda t] H(t) V(t, t') dt = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{t'}^{\infty} \exp[i\lambda t] dt \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega t] L(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\mu t] \bar{R}_+(\mu, t') d\mu \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(\lambda - \omega - \mu)t']}{\mu - (\lambda - \omega)} \bar{R}_+(\mu, t') d\mu \quad (Im\lambda > A_+).
 \end{aligned}$$

We are assuming that $\bar{R}_+(\mu, t')$ exists for real values of μ . We get from the Cauchy residue theorem for $Im\lambda > 0$

$$(125) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(\lambda - \omega - \mu)t']}{\mu - (\lambda - \omega)} \bar{R}_+(\mu, t') d\mu = \bar{R}_+(\lambda - \omega, t'),$$

by closing the integration path with a half-circle at infinity in the upper part of the μ -plane. It results from (123), (124) and (125) that

$$(126a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) \bar{R}_+(\lambda - \omega, t') d\omega - \lambda \bar{R}_+(\lambda, t') = \exp[i\lambda t'], \quad (Im\lambda > 0).$$

It is easily seen that

$$(126b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) \bar{R}_-(\lambda - \omega, t') d\omega - \lambda \bar{R}_-(\lambda, t') = \exp[i\lambda t'], \quad (Im\lambda < 0).$$

A very important particular case is that of a time independent unperturbed hamiltonian H_0 with a time dependent perturbation $H'(t)$

$$(127) \quad H(t) = H_0 + H'(t),$$

$$(128) \quad L(\omega) = H_0 \delta(\omega) + L'(\omega),$$

with

$$(129) \quad L'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega t] H'(t) dt.$$

It follows from equations (126) that in this case

$$(130) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = R_{\pm,0}(\lambda) \left[\exp[i\lambda t'] - \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) \bar{R}_{\pm}(\lambda - \omega, t') d\omega \right],$$

and thus

$$(131) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = R_{\pm,0}(\lambda) \left[\exp[i\lambda t'] - \int_{-\infty+\lambda}^{+\infty+\lambda} L'(\lambda - \lambda_1) \bar{R}_{\pm}(\lambda_1, t') d\lambda_1 \right].$$

The application of the method of successive approximations to (131) leads to the expansion

$$(132) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = R_{\pm,0}(\lambda) \left[\exp[i\lambda t'] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty+\lambda}^{+\infty+\lambda} L'(\lambda - \lambda_1) R_{\pm,0}(\lambda_1) d\lambda_1 \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty+\lambda_1}^{+\infty+\lambda_1} L'(\lambda_1 - \lambda_2) R_{\pm,0}(\lambda_2) d\lambda_2 \dots \int_{-\infty+\lambda_{n-1}}^{+\infty+\lambda_{n-1}} L'(\lambda_{n-1} - \lambda_n) R_{\pm,0}(\lambda_n) \exp[i\lambda_n t'] d\lambda_n \right].$$

The expansion for $R(\lambda, t')$, obtained from (132) by multiplication with $\exp[-i\lambda t']$, goes over into (77) when H is time independent.

The Feynman operator for time dependent external fields.

8. - In the general case of a time dependent electromagnetic field, it is no more possible to define the operator V_F in terms of eigenstates of the Dirac equation. It is nevertheless possible to extend the definition (70), by introducing the Fourier integral expansion of $V(t, t')$

$$(133) \quad V(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega t] F(\omega, t') d\omega,$$

and taking

$$(134) \quad V_F(t, t') = \eta(t-t') \int_0^{\infty} \exp[-i\omega t] F(\omega, t') d\omega - \\ - \eta(t'-t) \int_{-\infty}^0 \exp[-i\omega t] F(\omega, t') d\omega.$$

This generalization is the correct one, as it can be seen from the analysis given in the appendix of Feynman's paper, in which his procedure is related to the second quantization formulation of the hole theory. $V_F(t, t')$ is obtained from

$V_+(t, t')$ by subtraction of the negative frequency part of $V(t, t')$

$$(135) \quad V_F(t, t') = V_+(t, t') - \int_{-\infty}^0 \exp[-i\omega t] F(\omega, t') d\omega.$$

It is important to notice that $V_F(t, t')$ does not satisfy equation (116a), in general, because the negative frequency part of $V(t, t')$ is not a solution of the first equation (115), since

$$(136) \quad H(t)F(\omega, t') \neq \omega F(\omega, t'),$$

$V_F(t, t')$ is nevertheless a solution of (116b)

$$(137) \quad -i \frac{d}{dt'} V_F(t, t') - V_F(t, t') H(t') = i\delta(t - t'),$$

because

$$(138) \quad -i \frac{d}{dt'} F(\omega, t') = F(\omega, t') H(t').$$

The correct generalization of the Feynman integral equation is

$$(139) \quad V_F(t, t') = V_F^{(0)}(t - t') - i \int_{-\infty}^{+\infty} V_F(t, \tau) H'(\tau) V_F^{(0)}(\tau - t') d\tau,$$

because it leads to (137). This equation is not altogether satisfactory, as it can be seen by an analysis similar to that of sections 5 and 6.

The application of the method of successive approximations to (139) leads to the expansion

$$(140) \quad V_F(t, t') = V_F^{(0)}(t - t') + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_F^{(0)}(t - \tau_1) H'(\tau_1) V_F^{(0)}(\tau_1 - \tau_2) H'(\tau_2) \dots \times \\ \times H'(\tau_n) V_F^{(0)}(\tau_n - t') \prod_{j=1}^n d\tau_j = V_F^{(0)}(t - t') + \sum_{n=1}^{\infty} V_F^{(n)}(t, t').$$

It is easily seen that such an expansion is not satisfactory, in general, because

$$(141) \quad \left(i \frac{d}{dt} - H_0 \right) V_F^{(n)}(t, t') = H'(t) V_F^{(n-1)}(t, t'),$$

and thus we should have

$$(142) \quad i \frac{d}{dt} V_F(t, t') - H(t) V_F(t, t') = i\delta(t - t').$$

We shall see later that it is possible to replace (140) by a more satisfactory expansion.

It results from (134) that

$$(143) \quad V_F(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{V(\lambda + t', t')}{t - t' - \lambda} d\lambda,$$

(C' being of the form represented in fig. 2, with the loops taken large enough to contain the points $\pm(t - t')$. In order to show the equivalence of (143) and (134), let us introduce into (143) the Fourier integral expansion of $V(t, t')$

$$(144) \quad V_F(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \exp[-i\omega t'] F(\omega, t') d\omega \int_{C'} \frac{\exp[-i\omega\lambda]}{t - t' - \lambda} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \exp[-i\omega t'] F(\omega, t') d\omega \int_{C'} \frac{\exp[-i\omega\lambda]}{t - t' - \lambda} d\lambda.$$

We shall close the integration path C' with a half-circle at infinity lying in the lower part of the λ -plane in the first integral, and with a half-circle at infinity lying in the upper part of the λ -plane in the second integral. The integrals with respect to λ can be evaluated by residues and we get (134).

By deformation of C' into the real axis (143) becomes

$$(145) \quad V_F(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} V(u, t') \frac{du}{t - u} + \frac{1}{2} \varepsilon(t - t') V(t, t').$$

This equation is a generalization of (105).

$V_F(t, t')$ can be expressed in terms of the generalized resolvent $R(\lambda, t')$ by a formula which generalizes (72)

$$(146) \quad V_F(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[-i\lambda(t - t')] R(\lambda, t') d\lambda.$$

In order to derive (146) we shall replace $(t - t' - \lambda)^{-1}$ in (143) by the following expressions

$$(147a) \quad (t - t' - \lambda)^{-1} = i \int_0^\infty \exp[-i(t - t' - \lambda)\alpha] d\alpha, \quad (\text{Im} \lambda > 0)$$

$$(147b) \quad (t - t' - \lambda)^{-1} = -i \int_{-\infty}^0 \exp[-i(t - t' - \lambda)\alpha] d\alpha, \quad (\text{Im} \lambda < 0)$$

$$\begin{aligned}
 (148) \quad V_F(t, t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{C'_+} d\lambda \int_0^\infty V(\lambda + t', t') \exp[-i(t - t' - \lambda)\alpha] d\alpha - \\
 &- \frac{1}{2\pi} \int_{C'_-} d\lambda \int_{-\infty}^0 V(\lambda + t', t') \exp[-i(t - t' - \lambda)\alpha] d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} \exp[-i(t - t')\alpha] d\alpha \int_0^\infty V(\lambda + t', t') \exp[i\alpha\lambda] d\lambda - \\
 &- \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} \exp[-i(t - t')\alpha] d\alpha \int_{-\infty}^0 V(\lambda + t', t') \exp[i\alpha\lambda] d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[-i(t - t')\alpha] R(\alpha, t') d\alpha,
 \end{aligned}$$

C'_+ and C'_- are the parts of C' lying above and below the real λ -axis, respectively; C_+ and C_- are the corresponding parts of C .

We can derive an expansion of $V_F(t, t')$ from (146) and (132)

$$(149) \quad V_F(t, t') = V_F^{(0)}(t - t') + \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[-i\lambda(t - t')] \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda, t') d\lambda,$$

with

$$(150) \quad \begin{cases} R_n(\lambda, t') = -R_0(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\mu t'] L'(\mu) R_{n-1}(\lambda - \mu, t') d\mu, \\ R_0(\lambda, t') = R_0(\lambda). \end{cases}$$

In order to compare this expansion with Feynman's one, we shall use the recurrence relation for the terms of (140)

$$(151) \quad V_F^{(n)}(t, t') = -i \int_{-\infty}^{+\infty} V_F^{(0)}(t - \tau) H'(\tau) V_F^{(n-1)}(\tau, t') d\tau,$$

and introduce the Fourier integral expansion

$$(152) \quad V_F^{(n)}(t, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\lambda(t - t')] \mathcal{R}_n(\lambda, t') d\lambda.$$

Thus we get for the $\mathcal{R}_n(\lambda, t')$ the same recurrence equations (150)

$$(153) \quad \mathcal{R}_n(\lambda, t') = -\mathcal{R}_0(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\mu t'] L'(\mu) \mathcal{R}_{n-1}(\lambda - \mu, t') d\mu \quad (\mathcal{R}_0 = R_0).$$

Therefore, we would have Feynman's equation, if it would be possible to deform C into the real axis in (149), and then to integrate the series term by term.

The invariant resolvent in quantum field theory.

9. - We shall consider now a dynamical system formed by two quantized interacting fields. The unperturbed hamiltonian H_0 will be taken as the hamiltonian of the non interacting fields and H' will denote the interaction. We shall assume that H' is the space integral of a scalar $\mathcal{H}(x)$, as it happens in the case of the system electromagnetic field plus electron field in interaction

$$(154) \quad H' = \int \mathcal{H}(x) dx.$$

In order to get a covariant formalism we shall introduce the operator $U(\sigma, \sigma')$ depending on two space-like surfaces in space-time and satisfying the Tomonaga-Schwinger equations

$$(155) \quad i \frac{\delta U(\sigma, \sigma')}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}(x) U(\sigma, \sigma'),$$

with

$$(156) \quad \mathcal{H}(x) = \exp [iH_0 x_0] \mathcal{H}(x) \exp [-iH_0 x_0].$$

We shall assume the compatibility conditions

$$(156a) \quad [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0, \quad (x'' - x'') (x_\mu - x'_\mu) < 0.$$

In order to introduce the invariant resolvent we shall consider a family of space-like surfaces σ , depending on an invariant parameter τ varying from $-\infty$ to $+\infty$. The surfaces σ , are such that any point of space-time belongs to one and only one of them. Furthermore, we shall assume that the points in which any time-like line intersects successive surfaces are ordered in time and that $\tau = -\infty$ and $\tau = +\infty$ correspond to surfaces infinitely remote in the past and future, respectively. All these conditions are fulfilled when the σ , are planes normal to an arbitrary time-like four-vector and τ denotes the oriented distance between the planes σ , and σ_0 , measured in the positive sense of time flux.

The resolvent $\mathcal{R}(\lambda, \sigma_r)$ is defined by the following equations

$$(157) \quad \mathcal{R}(\lambda, \sigma_r) = \begin{cases} \exp [-i\lambda\tau'] \mathcal{R}_+(\lambda, \sigma_r), & \text{Im } \lambda > A_+ \\ \exp [-i\lambda\tau'] \mathcal{R}_-(\lambda, \sigma_r), & \text{Im } \lambda < A_- \end{cases}$$

with

$$(158a) \quad \mathcal{R}_+(\lambda, \sigma_{\tau'}) = i \int_{\lambda'}^{\infty} \exp[i\lambda\tau] U(\sigma_{\tau}, \sigma_{\tau'}) d\tau,$$

$$(158b) \quad \mathcal{R}_-(\lambda, \sigma_{\tau'}) = -i \int_{-\infty}^{\lambda'} \exp[i\lambda\tau] U(\sigma_{\tau}, \sigma_{\tau'}) d\tau,$$

λ_+ and λ_- being respectively the lower and upper limits of the imaginary part of λ for the existence of $\mathcal{R}_+(\lambda, \sigma_{\tau'})$ and $\mathcal{R}_-(\lambda, \sigma_{\tau'})$. The resolvent \mathcal{R} is obviously invariant.

We get from (155)

$$(159) \quad i \frac{d}{d\tau} U(\sigma_{\tau}, \sigma_{\tau'}) = \mathcal{K}'(\tau) U(\sigma_{\tau}, \sigma_{\tau'}),$$

with

$$(160) \quad \mathcal{K}'(\tau) = \int_{\sigma_{\tau}} \mathcal{H}(x) \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tau}{\partial x^{\mu}} \right)^{-1/2} d\sigma.$$

Introducing the Fourier integral expansion of $\mathcal{K}'(\tau)$

$$(161) \quad \mathcal{K}'(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega\tau] \mathcal{L}'(\omega) d\omega,$$

we get an integral equation for the $\mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'})$ which corresponds to (126)

$$(162) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'(\omega) \mathcal{R}_{\pm}(\lambda - \omega, \sigma_{\tau'}) d\omega - \lambda \mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'}) = \exp[i\lambda\tau'].$$

This equation is not entirely analogous to (126) because, by going over to the interaction representation, we did already take into account the influence of the unperturbed hamiltonian H_0 .

The application of the method of successive approximations to the solution of (162) gives an expansion of the $\mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'})$

$$(163) \quad \mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'}) = -\frac{\exp[i\lambda\tau']}{\lambda} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'(\omega_1) \frac{d\omega_1}{\lambda - \omega_1} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'(\omega_2) \frac{d\omega_2}{\lambda - \omega_1 - \omega_2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}'(\omega_n) \frac{\exp\left[-i \sum_{j=1}^n \omega_j \tau'\right]}{\lambda - \sum_{j=1}^n \omega_j} d\omega_n \right].$$

We get from (163) by simple transformations

$$(164a) \quad \bar{\mathcal{R}}_+(\lambda, \sigma_{\tau'}) = -\frac{1}{\lambda} \left[\exp[i\lambda\tau'] + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{\tau'}^{\infty} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-1}}^{\infty} d\tau_n \mathcal{K}'(\tau_n) \mathcal{K}'(\tau_{n-1}) \dots \mathcal{K}'(\tau_1) \exp[i\lambda\tau_n] \right],$$

$$(Im\lambda > 0);$$

$$(164b) \quad \bar{\mathcal{R}}_-(\lambda, \sigma_{\tau'}) = -\frac{1}{\lambda} \left[\exp[i\lambda\tau'] + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \mathcal{K}'(\tau_n) \mathcal{K}'(\tau_{n-1}) \dots \mathcal{K}'(\tau_1) \exp[i\lambda\tau_n] \right].$$

$$(Im\lambda < 0).$$

The expansions (164) show that the $\mathcal{R}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'})$ are the solutions of the differential equation

$$(165) \quad -i \frac{d}{d\tau'} \bar{\mathcal{R}}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'}) = -\exp[i\lambda\tau'] + \bar{\mathcal{R}}_{\pm}(\lambda, \sigma_{\tau'}) \mathcal{K}'(\tau'),$$

defined by the initial conditions

$$(166) \quad \bar{\mathcal{R}}_+(\lambda, \sigma_{\infty}) = 0, \quad \bar{\mathcal{R}}_-(\lambda, \sigma_{-\infty}) = 0.$$

The differential equation (165) and the conditions (166) can be derived directly from (158), by taking into account that

$$(167) \quad -i \frac{\delta}{\delta\sigma'(x')} U(\sigma, \sigma') = U(\sigma, \sigma') \mathcal{H}(x').$$

The solution of (165) by the method of successive approximations leads again to the expansions (164).

RIASSUNTO (*)

Gli operatori risolvanti della teoria delle equazioni funzionali lineari si applicano in genere al formalismo quantico e più specialmente alla formulazione della teoria dei positroni data da FEYNMAN. Si dà una generalizzazione degli operatori risol-

(*) Traduzione a cura della Redazione.

venti per trattare problemi con hamiltoniani dipendenti dal tempo. Si dimostra che la formulazione di FEYNMAN equivale a considerare nel nucleo di propagazione onde divergenti per le energie cinetiche positive e onde convergenti per le energie cinetiche negative. Dai risolvanti si derivano sviluppi dei nuclei di propagazione senza impiegare l'equazione integrale di Feynman che presenta difficoltà. Si definisce un risolvante relativisticamente invariante nella teoria dei campi interagenti quantizzati. Un operatore derivato dal risolvante serve a descrivere un nuovo tipo di collisione che può essere usato nella teoria dello stato fondamentale dei nuclei atomici.

Risonanza paramagnetica in alcuni allumi di Cromo a varie temperature.

A. F. KIP (*)

University of California - Berkeley (U.S.A.)

C. F. DAVIS, L. JENNINGS, D. REINER

Massachusetts Institute of Technology - Cambridge (U.S.A.)

R. MALVANO

Politecnico di Torino

Centro Studi di Elettrofisica presso l'Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 27 Giugno 1951)

Riassunto. — Si riferiscono alcuni risultati sperimentali sulla risonanza paramagnetica di un gruppo di allumi di Cromo a varie temperature. Si è riscontrato che lo splitting del livello fondamentale è quasi indipendente dalla temperatura, fino a 4 °K, almeno, per gli allumi di Cromo con Rubidio e Cesio, mentre per quelli con Ammonio e Potassio ne dipende in modo cospicuo e singolare. Al di sotto di una certa temperatura i risultati sperimentali conducono ad ammettere una variazione della simmetria microcristallina dei campi elettrici intorno agli ioni Cromo; in particolare una rotazione degli assi dei campi elettrici trigonali.

1. — Introduzione.

Il fenomeno della risonanza paramagnetica è stato studiato negli allumi di Cromo da parte di vari ricercatori ⁽¹⁾: nel presente lavoro, eseguito nei laboratori del Massachusetts Institute of Technology durante l'anno 1950, si cerca di portare un ulteriore contributo sperimentale in questo campo.

(*) Già professore di Fisica al M.I.T.

⁽¹⁾ C. A. WHITMER, R. T. WEIDNER, J. S. HSIANG e P. R. WEISS: *Phys. Rev.*, **74**, 1478 (1948); D. HALLIDAY e J. WHEATLEY: *Phys. Rev.*, **74**, 1712 (1948); B. BLEANEY: *Phys. Rev.*, **75**, 1962 (1949); B. BLEANEY: *Proc. Roy. Soc.*, **204**, 203 (1950); R. MALVANO e M. PANETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 28 (1949); *Phys. Rev.*, **78**, 826 (1950); A. F. KIP, R. MALVANO e C. F. DAVIS: *Phys. Rev.*, **82**, 342 (1951).

Il lavoro si divide in tre parti, nelle quali si danno dei cenni:

- a) sulla disposizione sperimentale;
- b) sulla teoria dell'effetto Zeeman negli allumi di Cromo;
- c) sui risultati sperimentali a cui si è pervenuti.

2. - Disposizione sperimentale.

Lo schema di massima dell'apparato sperimentale è contenuto nella fig. 1. Esso è essenzialmente uguale, salvo qualche lieve variante, a quello descritto in *Nuovo Cimento*, 7, 28 (1950).

La sostanza paramagnetica in esame, contenuta in una opportuna cavità

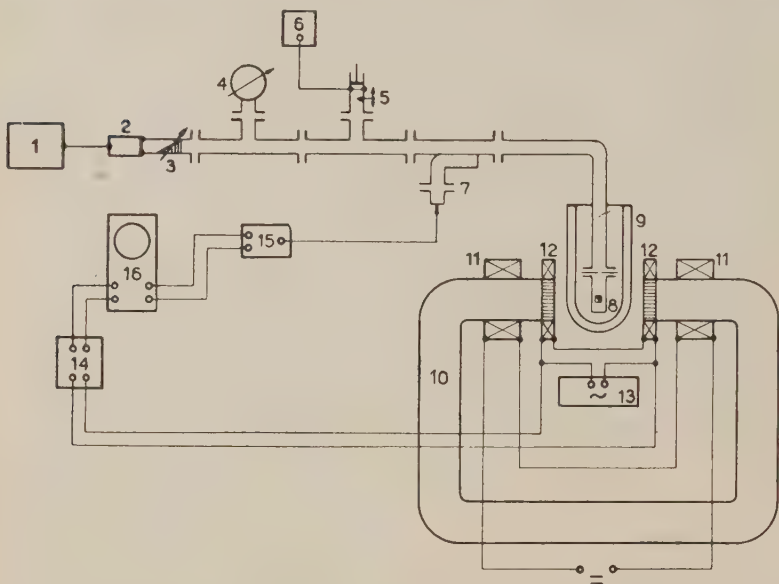


Fig. 1. - Schema di massima della disposizione sperimentale.

risonante, viene assoggettata contemporaneamente ad un campo magnetico H alternativo ad elevatissima frequenza ν generato da una sorgente di energia a microonde, e ad un campo magnetico H_0 statico con le linee di forza normali al piano di vibrazione del campo magnetico alternativo: si determina lo spettro di assorbimento della sostanza rivelando l'assorbimento relativo di energia al variare del campo magnetico applicato H_0 . Per poter eseguire le misure a temperatura molto bassa si deve disporre la cavità risonante in opportuni vasi «Dewar». Sarebbe quindi molto difficile usare una cavità in

trasmissione munita di due aperture (ingresso ed uscita) e di due linee relative e quindi si adotta il sistema della cavità in riflessione, cioè di una cavità a lunghezza d'onda costante posta all'estremo di una guida d'onda ed accoppiata a quest'ultima mediante un diaframma ad iride. Il coefficiente di riflessione γ di una cavità cosiffatta risulta (vedi *Phys. Rev.*, **74**, 1748 (1948)):

$$(1) \quad |\gamma| = \left| \frac{G - G_0 + j\omega C + \{j\omega(L_c + L_s[1 + 4\pi\chi' - 4\pi j\chi''])\}^{-1}}{G + G_0 + j\omega C + \{j\omega(L_c + L_s[1 + 4\pi\chi' - 4\pi j\chi''])\}^{-1}} \right|,$$

dove C , L_c , G , G_0 sono capacità, induttanza, conduttanza, equivalenti della cavità vuota; G_0 conduttanza equivalente della guida d'onda alimentatrice; L_s induttanza equivalente della sostanza in esame in assenza di risonanza paramagnetica; $1 + 4\pi(\chi' - j\chi'')$ è la permeabilità complessa di tale sostanza; χ' , χ'' le componenti reale ed immaginaria della suscettività della sostanza data, che, in assenza del fenomeno di risonanza, si possono considerare trascurabili rispetto ad uno (almeno a temperature non troppo basse).

Si ponga ora $L_0 = L_c + L_s$ e si consideri la cavità in risonanza quando $\chi' = \chi'' = 0$ cioè si ponga $j\omega C + 1/j\omega L_0 = 0$

$$(1') \quad |\gamma| \cong \left| \left[G - G_0 + \frac{4\pi L_s}{\omega L_0^2} (j\chi' + \chi'') \right] / 2G_0 \right|,$$

se $(2\pi L_s/\omega L_0^2) |j\chi' + \chi''| \ll G_0$ la (1') si può mettere nella forma

$$(1'') \quad |\gamma| \cong | -k(\chi' - j[\chi'' + \beta]) |,$$

dove $k = 2\pi j/\omega L_0^2 G_0$, $\beta = j\omega L_0^2 G_0 (G - G_0)/4\pi G_0$, per cui infine si ha:

$$(1''') \quad \gamma^2 = k^2 (L_s^2 \chi'^2 + L_s^2 \chi''^2 + \beta^2 + 2\beta L_s \chi'').$$

Per $\beta = 0$ risulta

$$\gamma^2 \sim \chi'^2 + \chi''^2,$$

mentre per β abbastanza grande si vede che $\gamma^2 \sim \chi''^2$ cioè la potenza riflessa dalla cavità è proporzionale alla parte immaginaria della suscettività χ'' , cioè all'assorbimento di energia da parte della sostanza paramagnetica.

La cavità risonante è un semplice tronco di guida d'onda rettangolare, nella quale viene disposta la sostanza (monocristallo), incollata ad una parete della cavità stessa per mezzo di una colla di polistirene liquido. Si fa anche uso di una speciale cavità della stessa forma ma costruita in modo da permettere la misura della risonanza per diverse giaciture del cristallo rispetto al campo magnetico esterno H_0 . Questa cavità contiene nel suo interno un piccolo bastoncino di plexiglas sul quale viene incollato il cristallo stesso. Questo bastoncino si estende un po' al di fuori della cavità e può venir ruotato anche quando la cavità si trova nel « Dewar ». L'angolo tra una faccia del cristallo

e la direzione del campo magnetico viene determinato osservando con un cannocchiale una linea di riferimento segnata sull'esterno del bastoncino. Si può misurare la giacitura del cristallo con una accuratezza di circa 1° .

Il generatore a klistron, tipo 2K25, funziona su una frequenza fissa (circa 10 000 MHz): la potenza fornita viene modulata in ampiezza a frequenza ultrasonica, mediante un sistema modulatore inserito nella guida d'onda alimentatrice, e costituito da una impedenza variabile.

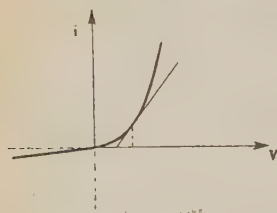


Fig. 2. - Caratteristica di un diodo rettificatore al Silicio.

Tale impedenza viene realizzata mediante un diodo al Silicio 1N23 disposto entro un tronco di guida d'onda rettangolare; ai suoi estremi viene collegata una tensione variabile periodicamente. La caratteristica di un tale diodo è rappresentata in fig. 2: la sua impedenza differenziale risulta funzione della tensione di polarizzazione applicata: variando quest'ultima si cambia con-

temporaneamente l'impedenza del cristallo, e quindi l'impedenza del tratto di guida a cui quest'ultimo è connesso.

Il raffreddamento della sostanza a bassa temperatura si ottiene per mezzo di punti fissi costituiti dai seguenti agenti raffreddatori:

- 1) CO_2 solido (temperatura 190°K);
- 2) O_2 liquido (temperatura 85°K);
- 3) N_2 liquido (temperatura 77°K);
- 4) He liquido (temperatura 4°K).

Per conservare queste sostanze raffreddanti per tutta la durata delle misure (2, 3 ore) si fa uso di recipienti « dewar » in pirex, molto lunghi e stretti (fig. 3) nei quali viene immersa non solo la cavità, ma anche buona parte della guida d'onda di alimentazione. Un solo « dewar » viene usato per gli agenti 1, 2, 3. Per l'He liquido è necessario utilizzare due vasi « dewar » l'uno dentro l'altro. Il più esterno serve a contenere Azoto liquido, come agente preraffreddante, mentre quello interno contiene Elio liquido. L'intercapedine del « dewar » interno è riempita con Azoto gassoso alla pressione di qualche mm di Hg. Si ottiene in questo modo un raffreddamento rapido e sicuro dell'ambiente interno che dovrà ospitare in un secondo tempo l'Elio liquido; quest'ultimo infine, non appena introdotto, produrrà un raffreddamento tale da solidificare il poco Azoto contenuto nella intercapedine lasciando così un vuoto interno quasi perfetto.

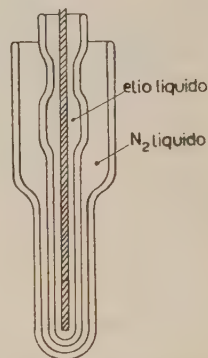


Fig. 3. - Disposizione sperimentale dei vasi « Dewar ».

Per la misura del campo magnetico si utilizza una spirale rotante (30 giri/s) comandata da un motore sincrono alimentato dalla tensione di rete a 60 periodi (vedi fig. 4); la costanza della frequenza di rete negli Stati Uniti essendo dell'ordine dell'1‰, la velocità di rotazione si poteva ritenere costante. Il metodo di misura della tensione ai capi della spirulina rotante disposta fra i poli dell'elettromagnete consisteva nel confronto di tale tensione con una tensione alternativa (2000 Hz) mantenuta rigorosamente costante; il metodo di confronto fa uso di un potenziometro non induttivo; come strumento di zero veniva usato un oscillografo catodico disposto nel modo che si dirà. La costanza della tensione di riferimento veniva controllata a meno dell'1‰. Le due tensioni alternative, della spirulina rotante e di riferimento, vengono sommate e portate ai capi dell'asse y dell'oscillografo. L'asse delle x è sincronizzato sulla rete. La

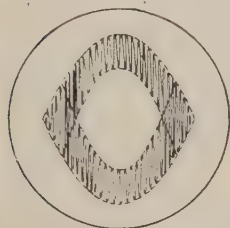


Fig. 5. — Metodo oscillografico per il confronto di f. e. m. alternative usato nella misura del campo magnetico.

figura che appare sullo schermo è simile a quella riportata in fig. 5. Variando la posizione del potenziometro, cioè la tensione di riferimento, si può ottenere il contatto fra gli involucri delle due tensioni. La taratura del sistema si eseguiva utilizzando la stessa risonanza paramagnetica di una sostanza organica particolare⁽²⁾ che presenta un picco di risonanza molto stretto (qualche oersted) con un valore di $g \approx 2$ a meno dell'1‰. Poiché la misura della frequenza poteva effettuarsi con un errore

probabile non superiore all'1‰ è da ritenere la taratura per la misura di campo affetta da un errore probabile non superiore all'1‰. Tenendo conto di tutte le cause di errore l'incertezza nella misura di campo risulta non superiore all'1‰.

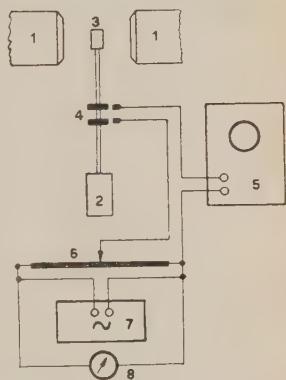


Fig. 4. — Schema di massima per la misura del campo magnetico.

⁽²⁾ A. N. HOLDEN, C. KITTEL, F. R. MERRIT e W. A. YAGER: *Phys. Rev.* **77**, 147 (1950).

3. - Cenni sulla teoria dell'effetto Zeeman negli allumi di Cromo ⁽³⁾.

Negli allumi di Cromo, descritti dalla formula chimica $[M\text{Cr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}]_4$, in cui M rappresenta uno ione metallico monovalente di raggio atomico confrontabile con quello del Cromo, lo ione Cr^{+++} trivalente è al centro di un ottaedro i cui vertici sono costituiti da 6 molecole di acqua di cristallizzazione che creano dei forti campi elettrici

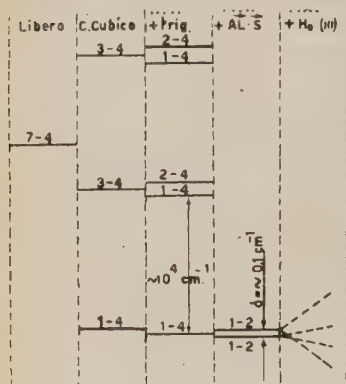


Fig. 6.

nel centro dell'ottaedro stesso. Lo stato spettroscopico di tale ione, quando è libero, risulta $3d^3$, $^4F_{3/2}$ (fig. 6, I colonna). Quando tale ione si trova disposto in un campo elettrico a simmetria cubica viene tolta in parte la degenerazione spaziale delle 7 autofunzioni orbitali (fig. 6, II colonna), altrimenti degeneri. Nella stessa figura è anche descritto l'effetto sullo stato fondamentale di un piccolo campo elettrico trigonale e dell'accoppiamento spin-orbita (fig. 6, III e IV colonna) ed infine del campo magnetico esterno (fig. 6, V colonna). Dato che il momento angolare J è semintero, per il teorema di Kra-

miers, un campo elettrico, qualunque ne sia la simmetria, non potrà togliere completamente la degenerazione: ciascun livello risultante sarà almeno doppiamente degenero.

Nella figura da sinistra a destra si trova graficamente descritto l'effetto dei vari termini perturbatori che modificano lo stato dello ione libero. L'anisotropia viene introdotta dal campo trigonale il cui asse è diretto nella direzione (111) e simili. In ciascuna cella elementare si trovano quattro ioni Cr^{+++} e gli assi dei campi elettrici trigonali in cui si trovano disposti hanno le direzioni: (111) ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) ($\bar{1}\bar{1}1$) ($1\bar{1}\bar{1}$).

Nell'eseguire le misure di assorbimento, disponendo il campo magnetico coincidente con una delle quattro direzioni anzidette, si ottiene evidentemente la sovrapposizione di due spettri corrispondenti agli angoli $\theta = 0$, $\theta = 70^\circ 33'$ (θ è l'angolo tra la direzione del campo magnetico e l'asse del campo elettrico trigonale). Lo spettro corrispondente a $\theta = 0$ è quello che più interessa per procedere a delle misure dirette dello splitting δ . I vari livelli energetici in presenza del campo magnetico H_0 e per un dato valore di θ si ottengono infatti

⁽³⁾ P. R. WEISS: *Phys. Rev.*, **73**, 470 (1948).

risolvendo il determinante secolare

$$\begin{vmatrix} \left(-W + \frac{3}{2}\xi \cos \theta - 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi \sin \theta \exp[-i\varphi]\right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi \sin \theta \exp[i\varphi]\right) \left(-W + \frac{1}{2}\xi \cos \theta + 1\right) & \xi \sin \theta \exp[-i\varphi] & 0 \\ 0 & \xi \sin \theta \exp[i\varphi] & \left(-W - \frac{1}{2}\xi \cos \theta + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi \sin \theta \exp[-i\varphi]\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi \sin \theta \exp[i\varphi]\right) \left(-W - \frac{3}{2}\xi \cos \theta - 1\right) \end{vmatrix} = 0$$

dove $W = 2/\delta\lambda$, $\xi = 2g\beta H_0/\delta hc$. Per $\theta = 0$ questo determinante è immediatamente fattorizzabile, e, tenendo conto della regola di selezione $|\Delta M| = 1$, si hanno le seguenti righe permesse

$$(3) \quad \Delta W = -\xi - 1, \quad -\xi, \quad -\xi + 1.$$

Si noti che per questo particolare valore di θ si ha equidistanza tra le tre righe costituenti lo spettro. Nello spettro relativo ai tre ioni che formano l'angolo $\theta = 70^\circ 33'$ non si ha invece equidistanza tra le tre righe: benchè la (2) non sia in questo caso immediatamente risolvibile, si può vedere che la riga centrale è quasi indipendente dall'angolo θ . In questo caso i livelli energetici sono dati con buona approssimazione per $\xi > 2$ dalle seguenti relazioni:

$$(4) \quad W_1 = (3/2)\xi - 0,4; \quad W_2 = (1/2)\xi; \quad W_3 = -(1/2)\xi; \quad W_4 = -(3/2)\xi - 0,2.$$

In questo caso sono possibili anche transizioni in cui $|\Delta M|$ sia diverso da 1. Nella tabella I si riportano le posizioni di queste righe proibite e la relativa intensità in funzione sia del parametro ξ sia di $\delta\lambda$. Tale intensità va riferita all'intensità della riga centrale, uno per ciascun ione.

TABELLA I.

$ \Delta M $	Posizione della riga	Intensità
3/2	$-2\xi + 0,4$	0,29 ξ^{-2} 0,07 $(\delta\lambda)^2$
	$-2\xi - 0,2$	
2	$-2\xi + 0,2$	0,05 ξ^{-2} 0,06 $(\delta\lambda)^4$

4. - Risultati sperimentali.

Nel lavoro sperimentale si sono presi in considerazione gli allumi di Cromo e K, Cs, Rb, Tl, NH_4 . Si è studiato il comportamento dello spettro sopra descritto in funzione della temperatura, e per una data lunghezza d'onda ($\lambda = 3,2$ cm).

a) Caso degli allumi con Cs, Rb e Tl.

Quando il metallo monovalente risulta Cs, Rb e Tl lo splitting δ risulta

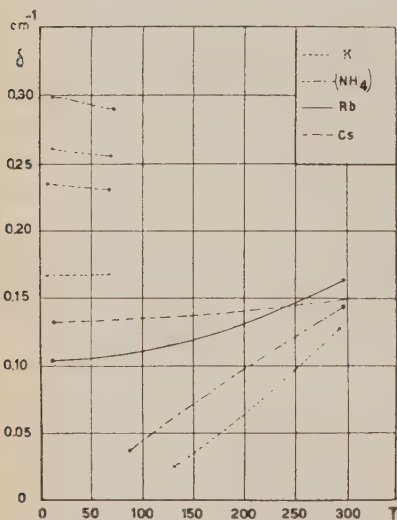


Fig. 7 - Andamento con la temperatura dello splitting δ per vari allumi di Cromo.

dell'ordine di $0,14 \div 0,16$ cm⁻¹ e varia poco al variare della temperatura da quella ambiente fino a 4 °K. Si riporta (fig. 7) l'andamento di δ nel caso del Cesio e del Rubidio. Si noti in particolare l'invarianza quasi completa dello splitting nel caso del Cesio. Sempre per questi due sali per i quali $\delta\lambda \leq 0,5$ si sono potute osservare distintamente le transizioni proibite; non è però stato possibile misurare con qualche accuratezza il rapporto fra le intensità delle righe proibite e permesse; l'ordine di grandezza, di qualche per cento della intensità della riga centrale, va però d'accordo con quello previsto dalla teoria. Si è visto inoltre che, entro gli errori sperimentali, derivanti dall'incertezza nella orientazione del cristallo rispetto al campo magnetico, ed alla

b) Caso degli allumi con Ammonio e Potassio.

Questi due allumi presentano al contrario un comportamento molto singolare al variare della temperatura; cioè lo splitting δ risulta fortemente variabile al variare di T ; al di sotto di una certa temperatura, che corrisponde a valore minimo dello splitting (ben definita nel caso dell'allume ammonico, incerta nel caso dell'allume potassico), lo spettro di risonanza cambia aspetto e si riscontra un notevole accrescimento del numero di righe. Questo spettro

è interpretabile se si suppone che i quattro ioni della cella elementare non si trovino tutti sottoposti allo stesso campo elettrico (venga cioè a cambiare la simmetria microcristallina del sistema): si deve cioè ammettere l'esistenza di almeno due valori di δ , esistenza non compatibile con l'ipotesi che tutti gli ioni Cromo del cristallo si trovino in una situazione equivalente. Questo doppio splitting è stato d'altra parte direttamente misurato da BLEANEY con misure a varie lunghezze d'onda (¹). In questo modo è possibile spiegare l'esistenza delle varie righe dello spettro. Si è però ancora riscontrato che le varie righe non corrispondono esattamente alla posizione deducibile teoricamente e che inoltre per lo ione con $\theta = 0$ non si ha più equidistanza tra le tre righe dello spettro. Si è pensato quindi che un tale stato di cose fosse imputabile ad una rotazione dell'asse del campo trigonale e si è quindi cercato quale nuova posizione esso fosse venuto ad assumere. Per mezzo di successive rotazioni in due piani ortogonali si è determinata sperimentalmente la posizione nella quale si è ritrovata tale equidistanza: questa posizione corrisponde ad un angolo di circa 20° rispetto alla direzione (111). Si può quindi concludere che:

1) al disotto di una certa temperatura si ha una trasformazione di spostamento, che non dà luogo ad alcuna variazione misurabile di entropia, ma modifica i campi elettrici che circondano gli ioni paramagnetici;

2) si ha una modificazione della struttura microcristallina della cella elementare nella quale i vari ioni cromo cessano di essere equivalenti;

3) si riscontra una rotazione dell'asse del campo elettrico trigonale di una ventina di gradi dalla direzione cristallografica (111);

4) si riscontra l'esistenza delle transizioni proibite, la cui intensità è fortemente decrescente al diminuire dello splitting δ .

5. — Ringraziamenti.

Si ritiene doveroso ringraziare il Dipartimento di Fisica del Massachusetts Institute of Technology e il Research Laboratory of Electronics, coll'aiuto dei quali si è potuto condurre a termine questa ricerca; in particolare MALVANO tiene a ringraziare personalmente il M.I.T. per l'ospitalità avuta durante il suo soggiorno negli Stati Uniti, fruendo di una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche a cui rivolge i suoi profondi ringraziamenti.

Si coglie ancora l'occasione di ringraziare il dott. J. EISENSTEIN per le utili discussioni con lui avute sull'argomento.

SUMMARY

We report some experimental data on the paramagnetic resonance of a certain number of Chrome Alums at various temperatures. We have observed that the splitting of the ground state is almost temperature independent down to 4 °K for the C.A. with Rubidium and Cesium, while it is strongly dependent for the C.A. with Ammonium and Potassium. Below a certain temperature we must explain the experimental evidence, assuming a definite variation of the microcrystalline symmetry of the electric fields around the Chrome ions; in particular a rotation of the axis of the trigonal fields.

Absorption of Slow μ -Mesons in Nuclear Emulsions.

A. BONETTI and G. TOMASINI

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 9 Luglio 1951)

Summary. 380 cm² of 600 μ Ilford G5 plates and 200 cm² of 400 μ Ilford G5 plates have been scanned, and 1004 tracks of mesons which stopped in the interior of the emulsion have been observed. The plates were exposed vertically during 6 days at 2900 m above sea level (Pic du Midi), far from heavy materials. The determination has been made of: a) the fraction of μ -mesons which undergo β -decay; b) the number of slow electrons associated with the capture of μ -mesons; c) the energy distribution of the slow electrons.

1. - Introduction.

The results of the counter experiments of CONVERSI, PANCINI and PICCIONI ⁽¹⁾ showed that the ordinary mesons constituting the bulk of the hard component of Cosmic Rays could not be the mesons postulated by YUKAWA in his theory of nuclear forces. The use of the photographic plate led to the discovery of the two types of mesons, the π and the μ , of which the π were found to be the nuclear interacting mesons, while the μ were identified with the ordinary Cosmic Rays mesons. On this basis the experimental results on the absorption of mesons in matter were found to be consistent with the theory of Yukawa.

⁽¹⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI and O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **71**, 209 (1947); T. SIGURGEIRSSON and A. YAMAKAWA: *Phys. Rev.*, **71**, 319 (1947); E. FERMI, E. TELLER and V. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **71**, 314 (1947); J. WHEELER: *Phys. Rev.*, **71**, 320 (1947); E. FERMI and E. TELLER: *Phys. Rev.*, **72**, 399 (1947); B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **5**, 325 (1948); A. FROELICH *et al.*: *Nature*, **162**, 450 (1948); R. HUBY: *Phil. Mag.*, **40**, 685 (1949).

The study of the absorption of slow mesons in the new highly sensitive photographic emulsions has been carried out by the Bristol group ⁽²⁾, by the Manchester and Brussels groups ⁽³⁾, and contemporarily to our work by W. F. FRY ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾.

2. — Experimental details.

The nuclear emulsions employed in our work were sensitive to minimum ionisation particles, so that electrons of all energies above 15 keV could be detected. Below this energy, to which corresponds a range of only 3 microns, identification becomes dubious. Recognition at lower energies is possible if the plate is underdeveloped, but in our case we were interested in getting a full development, in order to improve the efficiency of detection of the decay electrons, and, eventually, of very fast Auger electrons.

Difficulties of observation can lead to the loss of a certain fraction of the electrons. These losses can be attributed to the following causes:

- 1) in the low energy region (< 50 keV):
confusion with the end of the meson track;
- 2) in the intermediate energy region ($50 \div 150$ keV):
 - a) low grain density and small size of the grains;
 - b) high scattering;
- 3) in the high energy region (> 150 keV):
 - a) low grain density and small size of the grains;
 - b) geometric loss due to the dip of the tracks, or to the fact that they begin near the surface or the glass;
- 4) for all energies:
 - a) high background of tracks of electrons and high energy particles;
 - b) fading of latent image.

These causes of error are reduced:

- 1) by a full development, which increases the grains size and the density of grains;

⁽²⁾ R. BROWN *et al.*: *Nature*, **163**, 47 (1949).

⁽³⁾ M. COSYNS *et al.*: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 801 (1949).

⁽⁴⁾ W. F. FRY: *Phys. Rev.*, **79**, 893 (1950), and priv. comm. (in press.).

⁽⁵⁾ Preliminary results were exposed at the Congress of Physics, held in Bologna during September 1950.

2) by the use of very thick emulsions;

3) by short exposures of fresh, or eventually eradicated plates, in suitable conditions of humidity and temperature.

The use of thick emulsions gives an increase in the number of events per unit surface, for the same time of exposure, so that it is possible to reduce the time of exposure. In such conditions all the causes of loss are reduced, without unduly increasing the scanning time.

The present experiment was carried out with two groups of Ilford G5 plates, one of 600 μ thickness, in which 380 cm² of surface were scanned, and the other of 400 μ , in which 200 cm² were scanned. All the plates belonged to the same batch, and were exposed vertically during 6 days, far from heavy materials, at 2900 m above sea level (Pic du Midi).

The plates were developed in Brussels by temperature development⁽⁶⁾, following the specific technique described by DILWORTH, OCCHIALINI and VERMAESEN⁽⁷⁾. The absence of development in the cold stage was obtained by using a low pH amidol developer (pH = 6.6), while the great jump in temperature to the hot stage (5° to 32°) gave an explosive development, which increased not only the grain density of weakly ionizing tracks, but also the size of grains.

An explosive development like that employed in our plates leads to the formation of a considerable quantity of colloidal silver, which gives opacity to the plate and hinders the observation of the tracks. This trouble is overcome with a suitable clearing process. The particular method described by DILWORTH, OCCHIALINI and SAMUEL⁽⁸⁾ can be applied repeatedly, till the required transparency is achieved, without damaging either the tracks or the emulsion; after two successive applications of the method we got a good visibility of the minimum grain density tracks at every depth.

In the cases in which the image was obscured by the accumulation of the images of the silver grains in the upper layers of the emulsion, it has been possible to observe the event through the 1 mm backing glass⁽⁹⁾, using objectives with long working distance (45 \times Cooke l.w.d. and 55 \times Koristka special, with 1.4 mm working distance).

⁽⁶⁾ C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and R. M. PAYNE: *Nature*, **162**, 102 (1948).

⁽⁷⁾ C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and L. VERMAESEN: *Bull. C. de Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 13a (1950), pag. 15.

⁽⁸⁾ C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and E. SAMUEL: *Bull. C. de Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 2 (1948).

⁽⁹⁾ W. J. BATES and G. P. S. OCCHIALINI: *Nature*, **161**, 473 (1948).

3. — General results.

The table contains the results of the observations of all the tracks of mesons which stop in the emulsion (Table I).

We maintain the notation ϱ to denote the mesons not associated at the end of their range with either evaporation particles or a secondary meson, and σ to denote the mesons giving rise to one or more evaporation particles. The majority of the ϱ will be μ^- or μ^+ , but a small fraction will be π^- not giving rise to stars. The σ are chiefly π^- , but may include some μ^- . Mesons associated only with a fast electron are denoted by $\varrho + e$, and the existence of slow electrons is indicated by an A , e.g. $\varrho + A$, $\varrho + e + A$, $\sigma + A$.

We indicate with (°) the ϱ -mesons which show at the end of their range a thickening or blob, which cannot be recognized either as a very low energy electron, or a more massive particle of very short range.

4. — β -disintegration of μ -mesons.

a) *Correction for geometrical loss.* — A track, whose length projected on the plane of the emulsion is less than a certain amount, will be difficult to observe. The total number of the observed disintegration electrons must be corrected for this geometrical loss.

The fraction F of tracks which show a projection length greater than a certain value d in a plate of thickness T is given by:

$$F_{>d} = \sqrt{1 + d^2/T^2} - d/T.$$

If the observed number $N_{>d}$ of the projections greater than d is plotted against the theoretical distribution $F_{>d}$, and the best fitting straight line is drawn through the origin, its intersection with the straight line of equation $F = 1$ gives the total corrected number N .

We obtained for $T = 600 \mu$ a correction of 7%, and for $T = 400 \mu$ a correction of 10%, in agreement with the previous observations ⁽³⁾.

b) *Correction for the starless π^- .* — The experiments show that 27% of the π^- , which are stopped in the emulsion, are not associated with heavy particles of such an energy that their ranges may be recognized with certainty ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾, ⁽¹²⁾. This means that the starless π^- are 38% of the observed σ .

⁽¹⁰⁾ F. L. ADELMAN and S. B. JONES: *Phys. Rev.*, **75**, 1468 (1949).

⁽¹¹⁾ D. H. PERKINS: *Phil Mag.*, **40**, 601 (1949); **41**, 138 (1950).

⁽¹²⁾ M. G. K. MENON *et al.*: *Phil Mag.*, **41**, 583 (1950).

TABLE I.

OBSERVATIONS	$\varrho + e$		ϱ			Total	σ	$\pi^+ \rightarrow \mu^+$	$\varrho + A$			$\sigma + A$ > 20 keV	(°)	$\varrho + e + A$
	Total	+	Total	Gelatin	Ag Br				> 20	< 20	Total			
600 μ	473	—	285	—	—	—	74	25	—	—	—	—	—	—
Corr. geom. 7% . .	507	—	251	—	—	758	—	—	—	—	—	—	—	—
Corr. geom. $\pi^+ \rightarrow \mu^+$	—	—	—	—	—	—	66	33	—	—	—	—	—	—
400 μ	158	—	88	—	—	—	25	10	—	—	—	—	—	—
Corr. geom. 10% . .	173	—	73	—	—	246	—	—	—	—	—	—	—	—
Corr. geom. $\pi^+ \rightarrow \mu^+$	—	—	—	—	—	—	20	15	—	—	—	—	—	—
600 μ + 400 μ . .	680 \pm 17	—	324 \pm 12	—	—	1004 \pm 21	86 \pm 6	48 \pm 5	54 \pm 5	18	72	15 \pm 4	38	3
Corr. σ 38% . . .	680 \pm 17	486 \pm 10	194 \pm 27	292 \pm 17	242 \pm 34	973 \pm 20	—	—	—	—	—	—	—	—
Percentages	$\mu + e$	—	μ	μ_{Gel}	μ_{AgBr}	—	ϱ	—	μ^-	—	μ^-	σ	—	μ
	70 \pm 3	—	30 \pm 3	50 \pm 6	50 \pm 6	—	9	—	11 \pm 2	—	> 14	18 \pm 4	—	< 1
	—	—	—	—	—	—	—	—	μ_{AgBr}	—	μ_{AgBr}	σ_{AgBr}	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	22	—	> 28	~ 40	—	—

In our plates, it is difficult to distinguish the secondary μ^+ from a proton, when its range in the emulsion is less than 400μ . We employed then the correction formula for the geometrical loss of tracks of given length a , which leave an emulsion of thickness T before reaching the end of their range ⁽¹³⁾:

$$f = a/2T.$$

The corrected number of σ is 86 (9% of the ϱ); and the corresponding number of the starless π^- is 32. Taking into account this correction one obtains the true number of μ -mesons.

c) *Atomic capture of μ^- by light and heavy nuclei of the emulsion.* - Of 972 μ^- and μ^+ , we found that $70 \pm 2\%$ undergo β -disintegration. This percentage is in agreement with that found in ⁽²⁾, ⁽³⁾ and ⁽⁴⁾ within the experimental error. Apart from the smaller statistical error associated with our value, any factor of loss, not accounted for by the geometric correction, has been reduced in our experiments by the greater thickness of the emulsions employed, and by the more violent development.

The total number of observed events includes both positive and negative particles. The observations made until now indicate that positive and negative slow mesons are in equal number ⁽¹⁴⁾. Thus, since all the 486 μ^- undergo β -disintegration, there are 194 mesons with electron, which must be negative. From theoretical considerations we deduce that they are 80% of the negative mesons absorbed by the light elements of the emulsion; of which the total is then 242, so that the percentage of μ^- absorbed by the light elements is $50 \pm 6\%$. This value can be compared with the equivalent value obtained for π^- -mesons ⁽¹¹⁾, ⁽¹²⁾.

All the μ^- absorbed by the elements of the emulsion undergo nuclear capture.

In the discussion of these results we supposed that all the σ were π^- . This seems to be confirmed by a certain number of experiments ⁽¹²⁾, ⁽¹⁴⁾. Nevertheless it cannot be excluded that a fraction of the nuclear disintegration due to σ is due to nuclear capture of μ^- -mesons: this possibility has been suggested by GEORGE and EVANS, following their observations on the absorption of μ -mesons underground ⁽¹⁵⁾.

Taking into account these results, we obtain a total of 996 μ -mesons, and

⁽¹³⁾ J. B. ARDING S. LATTIMORE and D. H. PERKINS: *Proc. Roy. Soc.*, **196**, 325 (1949).

⁽¹⁴⁾ C. FRANZINETTI: *Phil. Mag.*, **41**, 86 (1950).

⁽¹⁵⁾ E. P. GEORGE and J. EVANS: *Proc. Phys. Soc.*, **64A**, 193 (1951). W. F. FRY, *Phys. Rev.*, **82**, 747, (1951).

the above percentages must be corrected as follows:

$\mu + e$	$68 \pm 3\%$
μ	$32 \pm 3\%$
$\mu_{\text{Ag, Br}}^-$	$54 \pm 7\%$
μ_{gelatin}^-	$46 \pm 7\%$

5. — Slow electrons associated with the capture of μ -mesons.

a) *Frequency of electrons of energy ≥ 20 keV.* — It has been observed ⁽²⁾, ⁽³⁾, that the capture of mesons by the material of the photographic emulsion is associated sometimes with low energy electrons, which can be attributed to an effect similar to the Auger effect ⁽¹⁾. The observable Auger electrons cover an interval of energies, which is limited on the low energy side by the stopping power of the emulsion, in our plates between 15 and 20 keV.

The full development which was employed has made dense the last microns of range of the electrons: so electrons of energy less than 20 keV are often difficult to distinguish from the end of the meson. For this reason the possibility of observing the emission of several electrons, corresponding to successive transitions of the meson, is small. For the same reason, the discrimination between very slow electrons and heavier particles of very short range, due to σ , is very uncertain. Nevertheless, it has been possible in some cases to recognize single electrons of energy less than 20 keV, and several electrons of different energies associated with the same meson track.

We considered as slow electrons associated with the end of a meson track, those which began within one micron from the end of the meson. The density and size of the grains make us confident that this rigorous criterion does not lead to a great loss at least for energies less than 100 keV. The contribution of chance juxtaposition has been controlled by observing the end of more than 400 protons in the same plates ⁽³⁾, and is less than 0,3%.

From the examination of the table we deduce that the frequency of slow electrons of energy greater than 20 keV is $6 \pm 1\%$ of all the μ^- and $11 \pm 1\%$ of the μ^- -mesons.

Since the frequency of events of the type $g + e + A$ is less than 1% of the μ^- , we deduce, in agreement with preceding results ⁽³⁾, that the greatest part of the observable Auger electrons is associated with the absorption of the μ^- by the heavy elements of the emulsion: thus at least 22% of the μ^- absorbed by Silver or Bromine show slow electrons of energy greater than 20 keV.

The deduction of this percentage has been made without taking into account the contribution due to the starless π^- .

If we assume that all the starless π^- (except those captured by Hydrogen) are associated with slow electrons, the number of Auger effects (≥ 20 keV)

which can be attributed to the capture of μ^- would fall to one half of the observed $\varrho + A$.

On the other hand, we deduce from our observations that $18 \pm 4\%$ of the σ stars (all 1-pronged) are associated with one or more slow electrons (≥ 20 keV). This frequency is in agreement with the results of the Bristol Group (¹²). Further it is reasonable to assume that all the $\sigma + A$ are absorbed by heavy nuclei.

Then, if starless π^- behave in a way similar to σ -mesons, 11 events, that is 20% of the observed $\varrho + A$ (≥ 20 keV) must be attributed to starless π^- . We obtain then that the percentage of the Auger effects is 9% of all the μ^- (18% of the μ^- captured by Silver or Bromine).

It may be of interest to compare the relative frequency of slow electrons associated with the capture of μ^- and σ -mesons. We have found 9% for the μ^- and 18% for the σ -mesons. If these slow electrons occur all in the process of atomic capture, then we should expect a greater number associated with the σ -mesons, whose higher mass will raise the transition energies and consequently the possibility of observation of electrons from equivalent levels.

It must be born in mind, however, that the presence of the disintegration particles in the σ -meson capture will tend to obscure more short electrons than are hidden by the end of the μ^- , so that the two percentages are not rigorously comparable.

Although we have referred to these slow electrons as Auger-electrons, we must point out that a part at least of them may be associated with internal conversion, or with β -activity following nuclear capture. A final decision as to their nature must rest on more precise data, as yet unobtained.

b) Frequency of electrons of energy less than 20 keV. - Taking into account the electrons of energy < 20 keV, which we have been able to identify as such, we find a total frequency of slow electrons of 14% of all the μ^- .

In addition we expect that a part at least of the ϱ with a « blob » (⁰) (¹⁴) should be μ^- with a very slow electron. We may estimate their number by the following considerations. Observations on artificial mesons (¹²) show that 40% of starless π^- have « blobs ». Of our 38 (⁰) mesons, we must suppose then that 15 are π^- . The remaining 23 should then be μ^- . If we include all these in our statistics as Auger effects, we have a total frequency of 19% of all the μ^- , and of 10% of all the μ .

c) Measure of the energy - The energy of the slow electrons was determined from their range, by means of a screw micrometer, which has the advantage, over the ordinary scale, of continuity in the displacement.

The correction for dip is the main source of error. In applying the cor-

rection factor for shrinkage, we have tried to introduce a systematic rule to take into account the smaller shrinkage of a practically continuous track. Since the silver grains do not contract themselves, we must suppose that the last 6 microns of a horizontal electron track, in which in our plates the grains are contiguous, will remain 6 microns at all orientations. We have therefore applied this rough criterion, that up to 6 microns from the end we have taken the length directly as that measured, and after we apply the full shrinkage factor.

Further, in attempting to follow the complicated course of heavily developed tracks, we may tend at the low energies to overestimate the length, since the size of the grains themselves exaggerates the contours. In the low grain

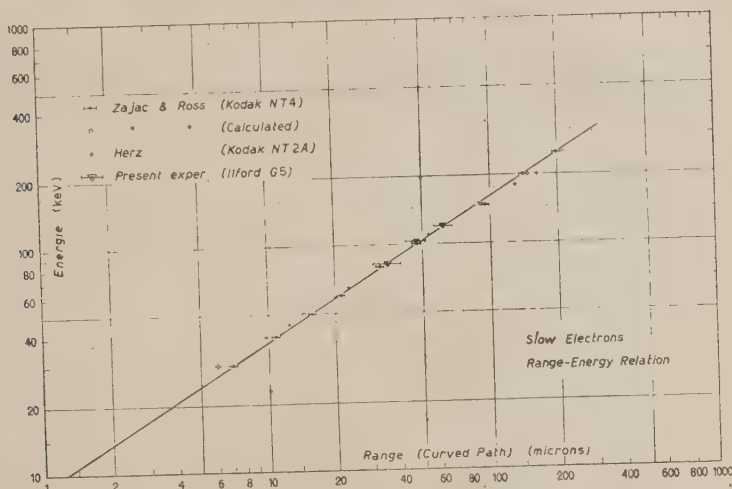


Fig. 1.

density of the higher energy tracks we shall tend to cut the corners and so underestimate the range.

The incertitude of the range of a single electron introduced by these errors is difficult to estimate.

We adopted the calibration of ZAJAC and ROSS⁽¹⁶⁾, for energies up to 250 keV, made on Kodak NT4 plates.

At least in first approximation, we know, from the published compositions of the emulsions, that the stopping power of NT4 is not very different from

⁽¹⁶⁾ B. ZAJAC and M. ROSS: *Nature*, **164**, 512 (1949).

We can say that our distribution is not in disagreement with the calculated distribution of lines.

It was shown by FERMI and TELLER ⁽¹⁾ that the probability of emission of radiation becomes greater than that of the emission of Auger electrons, as the meson approaches the inner orbits; WHEELER pointed out ⁽¹⁾, however, that in one of the last transitions a fast Auger electron may be emitted. Apart from these Wheeler electrons, the probability of emission of Auger electrons becomes very small at quantum number 4, for elements of $Z \approx 40$.

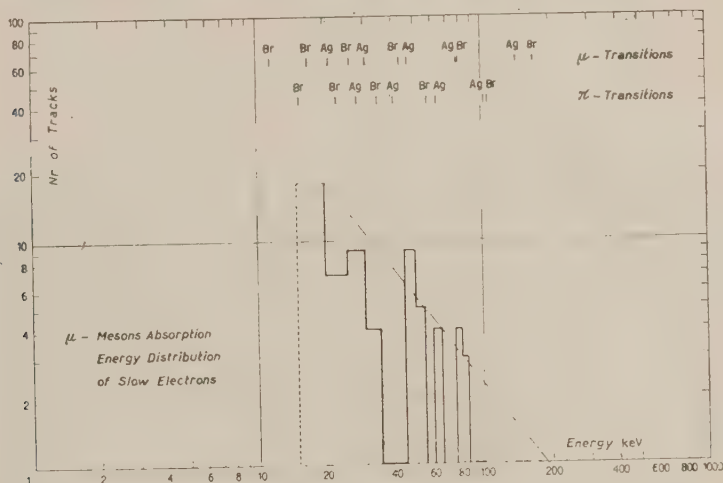


Fig. 3.

Our experimental evidence is consistent with this theoretical picture. We represented our results in double logarithmic scale, and found that it is possible to describe the distribution of the Auger electrons by a power law of the type:

$$N = aE^{-k},$$

where N = relative frequency of electron of energy E (keV). We give tentatively the numerical values: $a = 11,3$; $k = 1,4$ (fig. 3).

6. — Acknowledgments.

We are indebted to the Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre de Bruxelles for supplying the plates and for the facilities which one of us (A. B.) enjoyed: to prof. M. COSYNS, prof. M. SCHÖNBERG, prof. G. P. S.

OCCHIALINI and Mrs. C. OCCHIALINI DILWORTH for the interest shown in our work, and for many helpful discussions and suggestions. We wish to express our deepest gratitude to prof. A. OCCHIALINI for his constant interest and encouragement during our work. We wish also to thank dr. Y. GOLDSCHMIDT for invaluable help in the measurements with the β -ray spectrograph; to Miss E. ROCCHERO, who carried out a part of the calibration, and to the colleagues and observers of the Physical Institute of the University of Genoa.

RIASSUNTO

Sono stati esplorati 380 cm² di lastre Ilford G5 di 600 μ di spessore e 200 cm² delle stesse lastre di 400 μ , e sono state osservate 1004 tracce di mesoni che si fermavano nell'interno dell'emulsione. Le lastre erano state esposte verticalmente per 6 giorni a 2900 metri sul mare (Pic du Midi), lontane da materiali pesanti, e sono state sviluppate col metodo in temperatura. Particolare cura è stata posta nel controllare le cause di perdita nell'osservazione di tracce poco ionizzanti. Sono stati determinati: a) la frazione di mesoni μ che subiscono decadimento β . Tenendo conto delle correzioni dovute alla perdita geometrica e alla frazione di mesoni π^- non accompagnati da disintegrazioni visibili, la percentuale dei mesoni μ associati a un elettrone rapido risulta $70 \pm 3\%$. Se ne deduce in base a considerazioni teoriche che la percentuale di mesoni μ^- assorbiti dagli elementi leggeri dell'emulsione è $50 \pm 6\%$; b) il numero di elettroni lenti associati alla cattura dei mesoni μ . Si deduce che almeno il 6% dei mesoni μ è associato ad un elettrone lento. Tenendo conto del contributo dovuto ai mesoni π^- senza disintegrazione visibile, e in base a ragionevoli ipotesi, si trova che una frazione intorno al 20% dei mesoni μ^- assorbiti da Bromo o Argento è accompagnata da elettroni lenti di energia superiore a 20 keV; c) la distribuzione delle energie degli elettroni lenti. Per la misura della energia è stata eseguita una parziale calibrazione delle lastre. I risultati sembrano in soddisfacente accordo con le previsioni teoriche.

Luminosité a la rencontre d'ondes de choc produites par les charges creuses.

J. THIBAUD et D. PERRIER

Institut de Physique Atomique de l'Université - Lyon

(ricevuto il 17 Luglio 1951)

Résumé. — En vue d'une utilisation ultérieure pour l'amorçage de réactions thermo-nucléaires, la rencontre d'ondes de choc est étudiée dans l'Argon et l'air. Les ondes de choc sont engendrées par une ou deux charges creuses à effet convergent: la luminosité produite par la rencontre des ondes est observée également pour des pressions inférieures à la pression normale (quelques millimètres de mercure dans l'Argon), ainsi qu'en présence d'un champ électro-statique, pouvant servir à accélérer les ions produits au point de rencontre des ondes de choc.

1. — Objet des recherches.

La possibilité d'obtenir des réactions thermo-nucléaires, c'est à dire des réactions nucléaires par utilisation de l'agitation thermique au sein d'une masse gazeuse portée à haute température, fait l'objet de multiples recherches. Son importance serait, en effet, considérable pour l'utilisation des éléments les plus légers (Tritium par exemple) en vue de la libération de l'énergie intra-nucléaire, selon des schémas analogues à ceux qui nous sont suggérés par les cycles stellaires.

Nous décrivons ici les travaux effectués à Lyon depuis près de 3 années en vue de développer l'emploi des ondes de choc produites par des détonations pour arriver à amorçer de telles réactions thermo-nucléaires. On sait que la propagation d'ondes produites par la détonation d'explosifs brisants produit une couche de compression gazeuse à vitesse de translation élevée, où la température devrait s'élever considérablement (adiabatique de Hugoniot). En fait une part de l'énergie est utilisée à dissocier les molécules et ce n'est que lorsque

la dissociation est assez avancée qu'une élévation rapide de température peut avoir lieu.

On conçoit l'intérêt que présente, pour l'obtention de températures les plus élevées, l'emploi de gaz monoatomiques. Théoriquement, pour des vitesses du front des matières explosives de 10^4 mètres par seconde, on obtiendrait dans l'Argon une pression de 2400 atmosphères et une température de 160 000 °K; dans le xénon une pression de 7 800 atmosphères et une température de 515 000 °K.

En fait les températures atteintes expérimentalement, bien que très éloignées de ces valeurs théoriques, peuvent être déjà appréciables. Nous citerons particulièrement l'important travail de MM. A. MICHEL LEVY et H. MURAOUR ⁽¹⁾ sur la luminosité produite par la rencontre des ondes de choc dans l'Argon. Selon H. MURAOUR ⁽²⁾ la répartition énergétique du spectre continu de cette luminosité se rapprocherait beaucoup de celle d'un corps noir à 35 000 °K.

C'est en présence de résultats ainsi encourageants que l'un de nous a pensé, il y a 3 ans, que la rencontre d'ondes de choc puissantes pourrait être utilisée pour l'amorçage de réactions nucléaires. En fait, il semble qu'il y ait une marge élevée entre la température instantanée ainsi obtenue (35 000 °K) et les températures à partir desquelles ces premières réactions pourraient être obtenues dans un gaz léger.

Cependant deux remarques peuvent être faites:

a) la température indiquée par H. MURAOUR n'est pas limitative. L'emploi de plus grandes quantités d'explosifs ou d'explosifs encore plus brisants, doivent pouvoir accroître sensiblement celle-ci.

b) A partir d'une certaine température, non seulement la dissociation moléculaire, mais également une ionisation atomique appréciable doit se manifester.

Ainsi point ne serait besoin d'obtenir réellement une température aussi élevée que celle nécessaire au départ des réactions thermo-nucléaires, car il doit être possible d'accélérer les ions ainsi formés à l'aide d'un champ électrostatique convenable qui procurerait à ceux-ci l'énergie cinétique que la température atteinte ne suffirait pas à leur communiquer. Autrement dit, ce n'est pas tellement la température la plus élevée possible que l'on rechercherait dans la rencontre des ondes de choc, mais plutôt on profiterait de la densité

(1) A. M. LEVY et H. MURAOUR: *Compt. Rend.*, **198**, 825, 1499 (1934); **200**, 543 924 (1935); **201**, 828 (1935); **202**, 755 (1936); **203**, 316 (1936); **204**, 576 (1937); **205**, 1054 (1937); **206**, 1566 (1938); **208**, 508 (1939). *Journ. de Phys.*, VII, **6**, 496 (1935); **8**, 330 (1937); VIII, **1**, 260 (1940).

(2) H. MURAOUR: *Cahiers de Phys.*, Juin 1947; H. MURAOUR, J. ROMAND, et B. VODAR: *Compt. Rend.*, **223**, 620 (1946).

cubique exceptionnelle d'ions formés en un temps très court au point de rencontre des ondes. Le taux d'ionisation est en effet très élevé en ce point et l'on peut bénéficier d'une masse d'ions, même sous un très petit volume, qui une fois mise en mouvement par l'action du champ électrostatique auxiliaire, pourra produire par ionisation cumulative une masse considérable de plasma ionique. Remarquons qu'une telle densité cubique d'ions ne pourrait être obtenue par un champ électrique statique.

Ces considérations nous ont amené tour à tour :

a) à employer des charges creuses pour la production des ondes destinées à se rencontrer dans le gaz ;

b) à utiliser un gaz monoatomique à pression réduite, la théorie laissant prévoir, dans ces conditions, un accroissements de la température atteinte ;

c) à soumettre le gaz, simultanément à l'action des ondes de choc, à l'effet d'un champ électrique de quelques milliers de volts par centimètre.

2. — Essais de Mai 1949.

Nous avons tout d'abord repris le dispositif utilisé par MM. A. MICHEL LEVY et H. MURAOUR dans leur travail sur l'utilisation des rencontres d'ondes de choc dans l'Argon comme source lumineuse brève et puissante ⁽³⁾.

Ces ondes de choc résultent de la détonation dans l'air

ou dans l'Argon d'un volume variable de penthrite logé

dans une rigole circulaire, de façon à ce que, après deux trajets semi-circulaires identiques, ces ondes se rencontrent

au point B diamétralement opposé à A (mise de feu) (fig. 1). La détonation est produite, à l'intérieur d'un cylindre de rhodoïd

renfermant le gaz en expérience ; l'amorce est constituée par une pincée de perchlorate du diazo de métanitriline (0,02 g).

L'appareil (fig. 2) se compose de deux blocs métalliques (plomb, laiton ou acier) A et B.

Le bloc inférieur B enferme l'explosif dans une rigole circulaire U. L'amorce D est posée en un point de la rigole et la mise de feu se fait par fil d'acier rouge E.

La détonation est produite à l'intérieur d'un cylindre en rhodoïd F reliant les deux blocs.

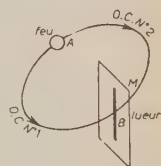


Fig. 1.

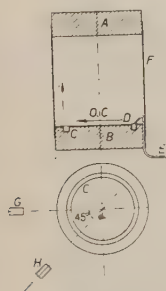


Fig. 2.

⁽³⁾ A. M. LEVY et H. MURAOUR: *Mémorial de l'Artillerie française* (1er fascicule (1949); *Cahiers de Phys.*, n. 29-30 (Juin 1947).

Deux appareils photographiques *G* et *H* sont placés à une distance de 0,40 m environ du dispositif. Leurs axes forment un angle approximatif de 45°.

Les essais sont exécutés dans l'obscurité, l'objectif restant ouvert pendant toute l'opération.

Un aspect typique, tout à fait en accord avec les résultats des auteurs précités est visible sur la photo 1: la détonation est produite dans l'Argon avec 1,168 cm³ de penthrite. Ce gaz est introduit dans le cylindre par un trou percé suivant l'axe du bloc inférieur. L'amorçage est placé sur le côté droit. On remarque la forte luminosité créée par la rencontre des ondes de choc, sur la gauche: une sorte de jet vertical *a*. Par ailleurs, il y a également luminosité lors de l'impact de l'onde résultant de cette rencontre sur le bloc supérieur, en *d*, le second cliché reproduit le dispositif (cylindre vertical et bloc circulaire à rigole en bas).

On observe que si l'on utilise pour remplir l'appareil, de l'Argon commercial des fabricants de lampes électriques (teneur en azote de 10 à 15%) la luminosité n'est pas plus forte que dans l'air. Il est nécessaire d'opérer avec de l'Argon purifié (oxygène 0,01 %, azote 0,3 %) pour constater l'accroissement de luminosité résultant de la substitution de l'Argon à l'air.

Sur la photo 2, l'essai a lieu à l'intérieur d'un cône en rhodoïd de 40 mm de hauteur (Argon à pression atmosphérique). Ici la luminosité atteint son maximum. La rencontre des ondes de choc se situe à gauche du cône.

3. — Choc des ondes en présence d'un champ électrique.

Deux électrodes métalliques, dont l'une isolée, sont fixées dans la pièce supérieure: elles doivent encadrer la zone où doit se produire la rencontre des ondes de choc (fig. 3).

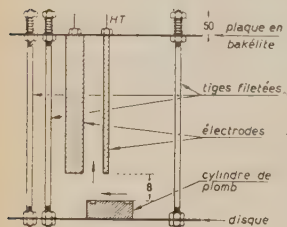


Fig. 3.

Sur la photo 3 le déclenchement de la détonation est effectué dans l'Argon à pression normale en présence d'un champ électrique (différence de potentiel entre électrodes 13 000 volts). On remarque (photo de gauche) les filets lumineux se déplaçant de droite à gauche car la mise de feu se fait à droite, puis la rencontre des ondes de choc sur l'électrode et le bloc supérieur. La luminosité est excellente; on l'aperçoit surtout sur le cliché de gauche, en *a*, entre les

extrémités inférieures des électrodes.

Ainsi la présence d'électrodes convenablement disposées ne trouble pas la production d'une onde de rencontre.

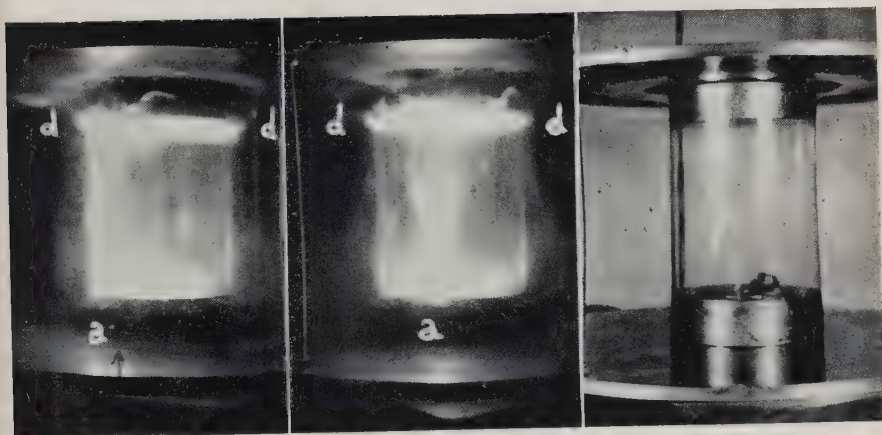


Photo 1. — L'Argon est contenu dans un cylindre transparent et la penthrite dans une gorge circulaire du bloc métallique inférieur (à droite). La rencontre des ondes de choc produit une vive luminosité en *a*, ainsi qu'en *d*.

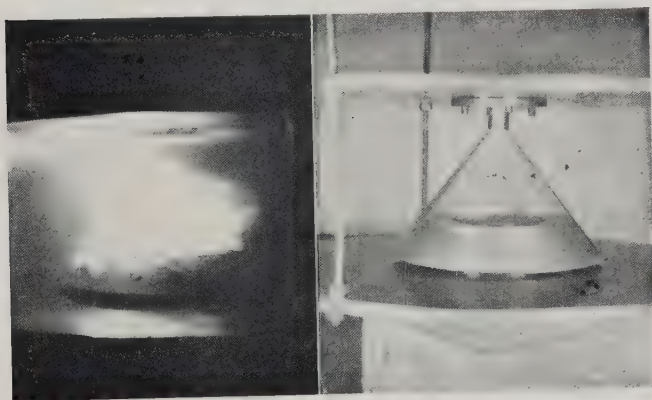


Photo 2. Rencontre d'ondes de choc dans l'Argon (pression normale) à l'intérieur d'un cône de rhodoid.

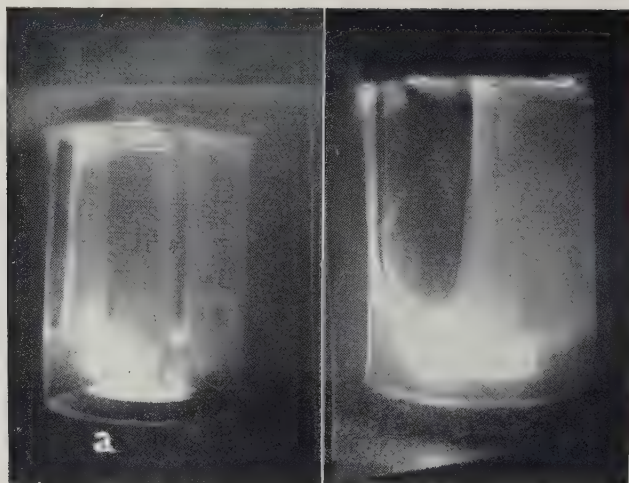


Photo 3. — Rencontre d'ondes de choc dans l'Argon à la pression atmosphérique en présence d'un champ électrique (électrode centrale sous tension 13 000 volts).



Photo 4. — Rencontre d'ondes de choc produites par deux charges creuses disposées horizontalement et face à face en 1 et 2 (L'explosion enregistrée eut lieu sans les électrodes *E* visibles sur le dispositif de droite).

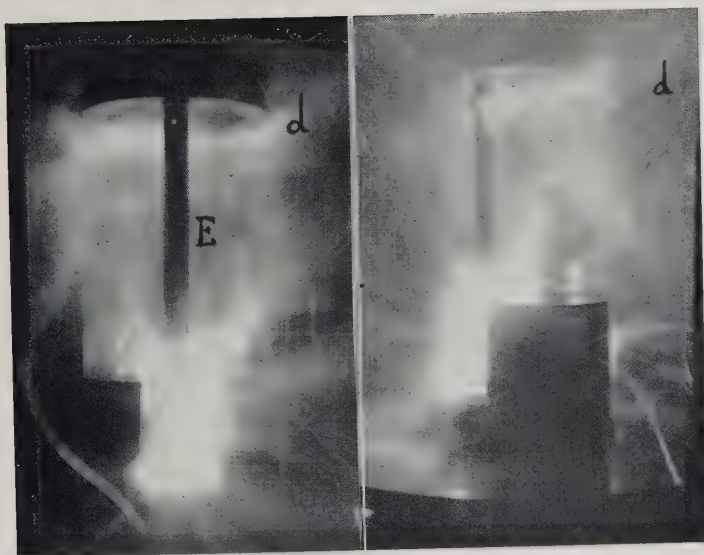


Photo 5. Rencontre d'ondes de choc produites par deux charges creuses horizontales, dans l'Argon à pression normale, en présence d'un champ électrique (électrode *E* au potentiel 20 000 volts)

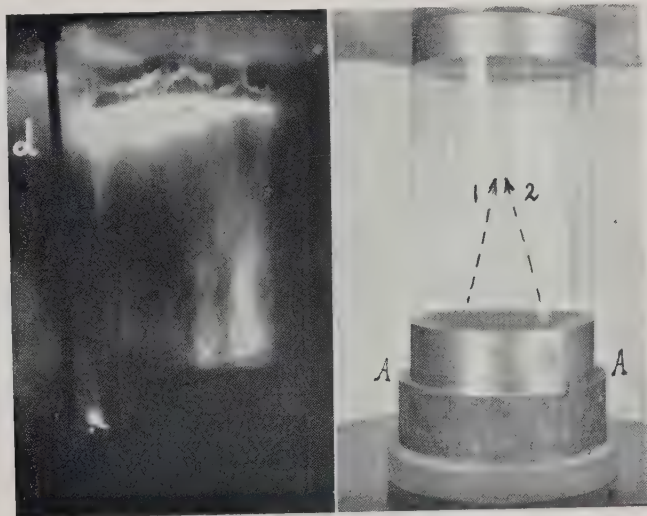


Photo 6. — Rencontre d'ondes de choc produites par deux charges creuses convergentes 1 et 2, dirigées vers le haut (dispositif de la fig. 6). Gaz dans le cylindre: air.

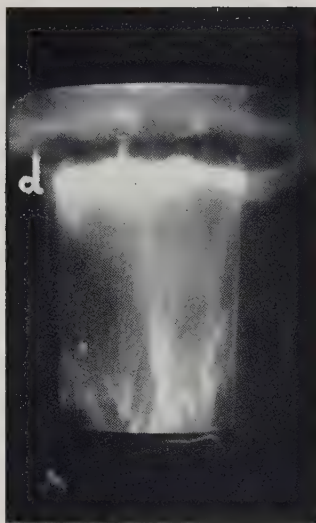


Photo 7. — Ondes de choc convergentes vers le haut (dispositif du schéma 11); gaz dans le cylindre: Argon.

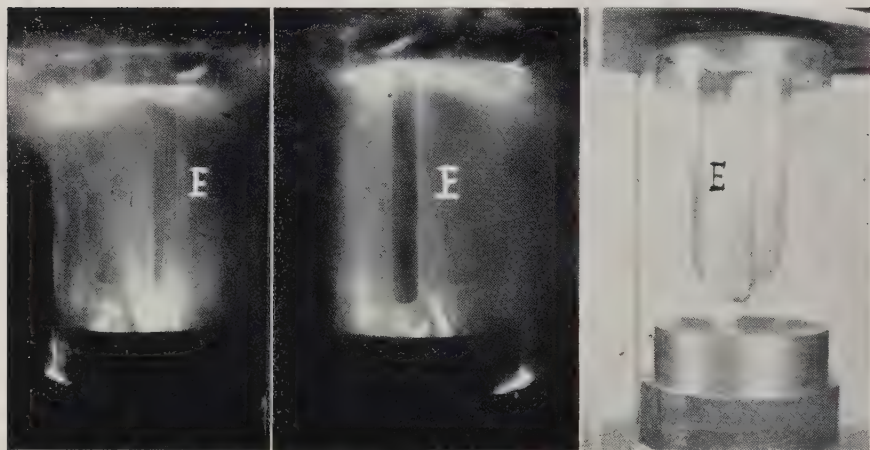


Photo 8. Charges creuses convergentes dans l'air en présence d'un champ électrique (20 000 volts appliqué à E).

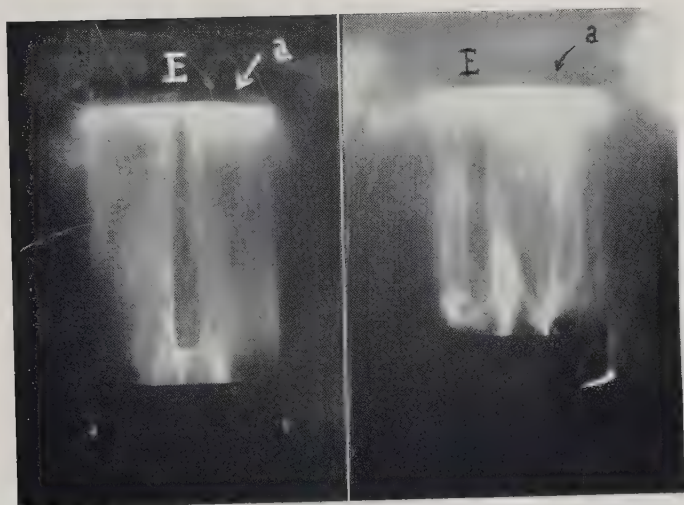


Photo 9. -- Charges creuses convergentes dans l'Argon à pression normale, en présence d'une tension de 15 000 volts appliquée à l'électrode *E*.

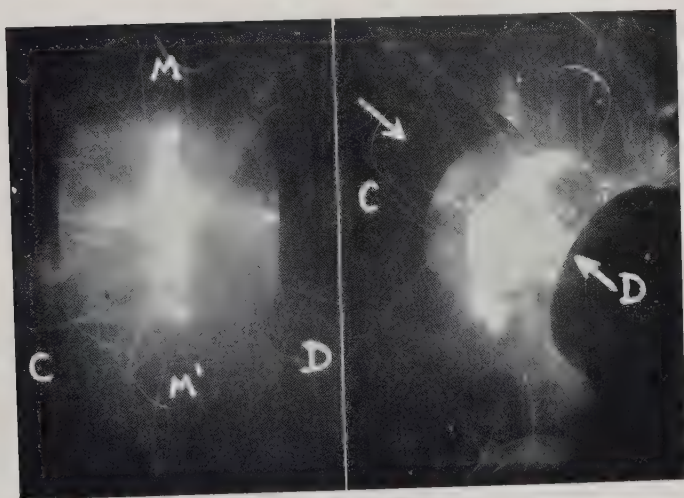


Photo 10. -- Charges creuses opposées horizontalement dans l'Argon.

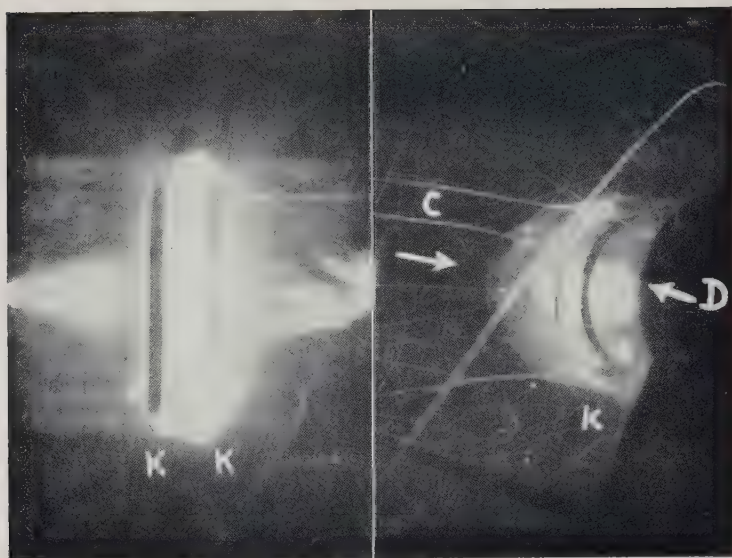


Photo 11. — Charges creuses horizontales dans l'Argon. Une électrode circulaire double *K*, au centre, portée à la tension 10^4 volts par rapport au reste de l'appareil.

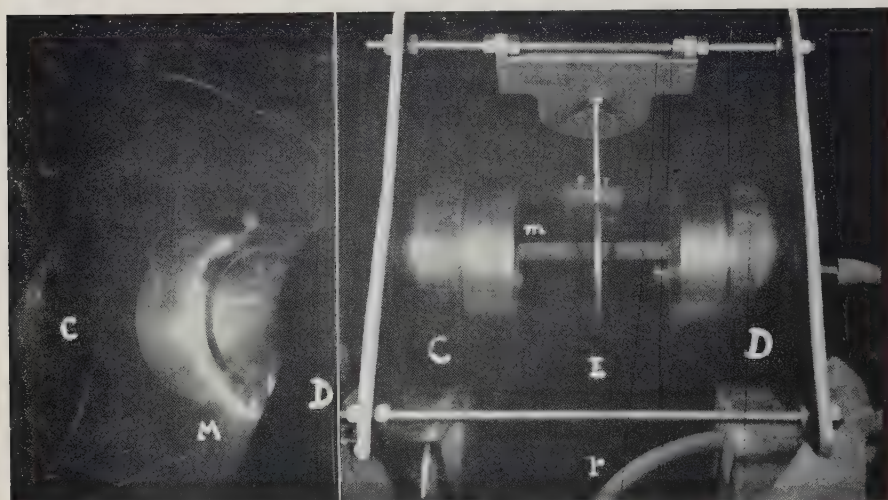


Photo 12. — Charges creuses face à face dans les blocs d'acier *C* et *D*; mise de feu simultanée par la cornière renfermant la trainée de poudre: électrode unique à haute tension *E*. A gauche, liseré lumineux *M* à la rencontre des deux ondes de choc.

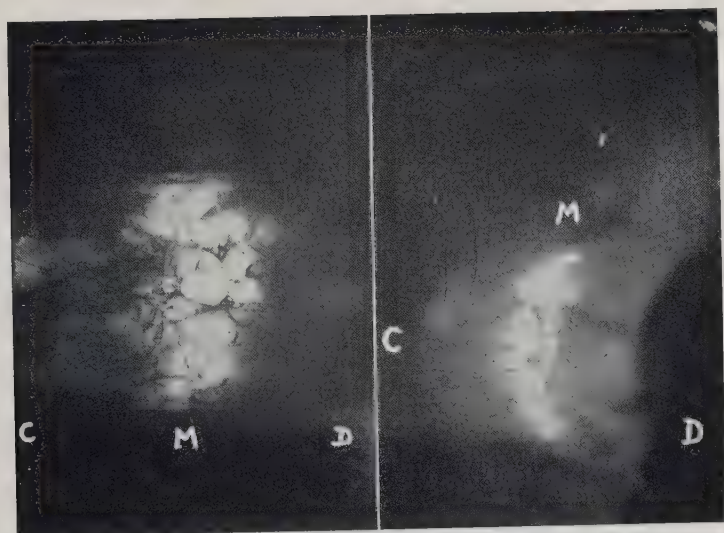


Photo 13. — Deux charges creuses horizontales. Argon a basse pression, dans un cylindre *CD* de verre de 5 mm d'épaisseur. Fragmentation du cylindre. Belle luminosité *M* à la rencontre des ondes de paroi (très visible au point d'impact sur la paroi).

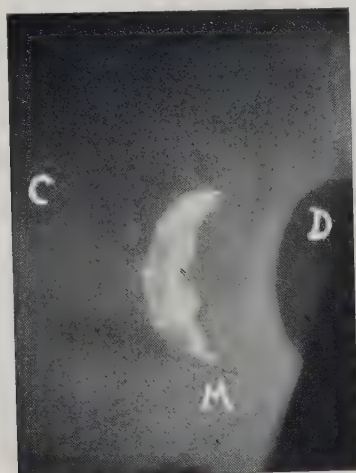


Photo 14. — Rencontre d'ondes de choc horizontales opposées dans de l'Argon à pression réduite ($p = 6$ mm de mercure).

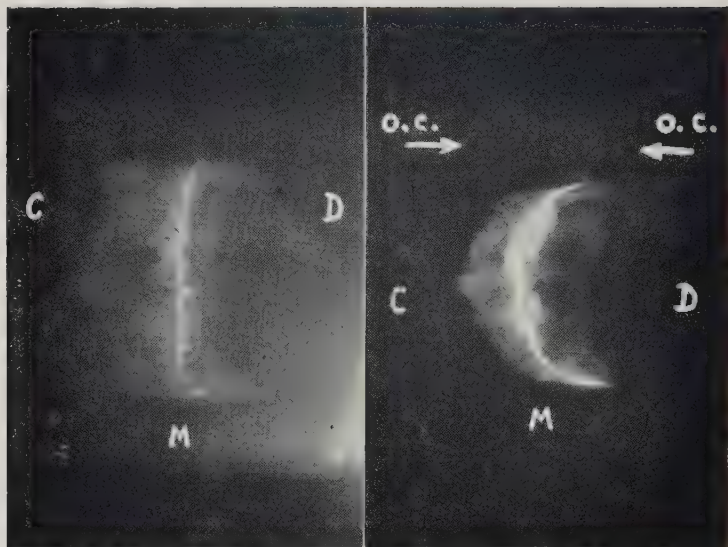


Photo 15. — Deux charges creuses, face à face horizontalement. Cylindre *CD* rempli d'Argon à la pression de 3 mm de Hg. Liseré *M* très caractéristique de la rencontre des ondes de choc *o.c.* (de profil, à gauche; de trois quarts, à droite).

4. — Emploi de charges creuses.

A partir de Septembre 1949, nous avons abandonné le dispositif de la rigole circulaire de Muraour, pour tenter de produire la luminosité à l'aide d'ondes produites par la détonation de « charges creuses ». Malgré la faible dimension de celles-ci (moins de 1 cm^3 d'explosif) le résultat a été excellent. La charge était contenue à l'intérieur de capsules standardisées en métal mince, de la forme indiquée sur la fig. 4. On a utilisé d'abord une seule charge creuse (on observait la luminosité produite au point de rencontre de l'onde avec une surface métallique opposée à la charge), puis deux, enfin quatre. La difficulté avec les charges

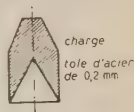


Fig. 4.

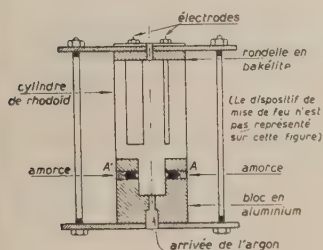


Fig. 5.

creuses multiples est d'obtenir la simultanéité des mises de

feu. On y parvient avec des cheminées et une mince rigole, percée dans le métal, puis remplies de penthrite. L'un des dispositifs (fig. 5) est visible à droite de la photo 4 (il comporte toutefois des électrodes *E* qui ne seront utilisées que pour l'essai ultérieur avec tension); il permet d'introduire de chaque côté du bloc inférieur une charge creuse. On a ainsi deux charges 1 et 2 se faisant face et l'on déclenche simultanément

les deux détonations dans l'Argon. Sur l'essai reproduit à gauche de la photo 4 et qui ne comportait pas d'électrodes, le volume total des 2 charges était de $1,963\text{ cm}^3$ d'explosif.

On remarque que la rencontre des ondes de choc se produit dans un plan vertical, la luminosité, vue par la tranche de la photo de gauche, apparaît comme un trait lumineux vertical *M*.

5. — Deux charges creuses opposées et champ électrique.

Une électrode axiale isolée *E* est rajoutée au dispositif précédent. La photo 5 représente deux détonations se faisant face effectuées simultanément, dans l'Argon à pression normale, l'électrode verticale étant portée au potentiel de 20000 volts. Belle luminosité: on distingue aussi la rencontre de l'onde résultante contre le bloc supérieur, en *d*.

6. — Deux charges creuses convergentes.

Le dispositif a subi une nouvelle modification: le bloc inférieur renferme les charges creuses dans des trous dont les axes forment un angle de 40° . La rigole *A* est utilisée pour la mise de feu (fig. 6).

Sur la photo 6, l'essai se passe à l'air libre. Le rencontres d'ondes de choc sont visibles en bas à droite du cylindre et sur le bloc supérieur, en *d*.

Sur la photo 7, l'essai est effectué avec le même dispositif que pour la photo 6, mais les détonations se produisent dans l'Argon. On note la luminosité plus grande en *d*.

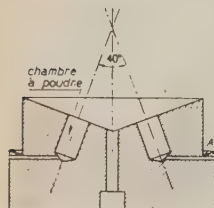


Fig. 6.

7. — Charges creuses convergentes et champ électrique.

A l'intérieur du dispositif précédent, on ajoute 2 électrodes verticales *E*. Dans l'essai de la photo 8 les 2 détonations sont produites dans l'air et avec un champ électrique (différence de potentiel de 20 000 volts). Ces 2 photos donnent les rencontres d'ondes de choc, en bas au centre et sur le bloc supérieur. On remarque sur la périphérie du bloc inférieur le fonctionnement de la mise de feu.

Le même dispositif de charges creuses convergentes a été utilisé pour la photo 9, mais les détonations se produisent cette fois dans l'Argon, en présence d'un champ électrique produit par l'action d'une électrode verticale *E* (tension de 15 000 volts). Une première rencontre des ondes de choc est visible au centre du cliché et au-dessus du bloc inférieur. Une seconde rencontre des ondes de choc s'observe sur le bloc supérieur, en *a*.

8. — Charges creuses directement opposées.

Dans un autre dispositif, le cylindre rempli de gaz *CD* ⁽⁴⁾ est toujours hori-

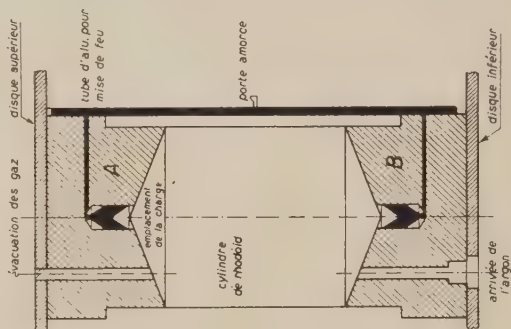


Fig. 7.

(⁴) Sur la fig. 7 lire *A* et *B* pour les blocs terminaux *C* et *D*.

zontal, mais les charges sont face à face (fig. 7). L'ensemble est visible à droite de la photo 12. Chaque bloc terminal *C* et *D* reçoit suivant son axe une charge creuse. L'écartement entre les blocs est de 80 mm environ.

Le volume total des 2 charges est inchangé; il est toujours de 1,963 cm³. La mise de feu s'effectue par une trainée de poudre sur une cornière en laiton *m* reliant les 2 blocs. Les deux détonations simultanées reproduites sur la photo 10, sont produites dans l'Argon. On aperçoit très nettement la rencontre des ondes de choc au milieu du dispositif, suivant un plan *MM'* perpendiculaire à l'axe du cylindre. La même luminosité très vive, concentrée dans *MM'*, se voit de trois quart sur le cliché de droite.

Le même appareil à charges creuses opposées peut-être équipé de une ou deux électrodes circulaires (de manière à ne pas gêner la rencontre médiane des ondes de choc).

Sur la photo 11, on observe la belle luminosité obtenue dans l'Argon, avec une électrode circulaire double *KK* entourant le plan *MM'* de rencontre des ondes (tension 10⁴ volts sur l'électrode *K*).

On peut d'ailleurs remplacer l'électrode double *K* par une électrode simple *E* formée seulement d'un anneau. C'est le cas de la photo 12 (Argon), où l'on voit nettement la rencontre des deux ondes de choc représentées par un liseré lumineux *M* suivant la paroi intérieure du cylindre.

9. — Rencontre d'ondes de choc, produites par deux charges creuses, dans un gaz à faible pression.

Si l'on veut étudier le choc des ondes à des pressions très inférieures à la pression atmosphérique, il faut renforcer la paroi du cylindre translucide reliant les blocs d'acier *C* et *D*. Nous avons d'abord utilisé un cylindre de verre de 5 mm d'épaisseur de paroi. Celui-ci se fragmente au moment de la détonation. On voit sur la photo 13 la belle luminosité *M* obtenue dans l'Argon à la pression de 1 cm de mercure rendant visibles les fragments du verre avant leur dispersion.

Bien que la masse de gaz en expérience ait ici diminué, on constate que la luminosité reste intense, conclusion en accord avec les prévisions théoriques.

Deux autres essais dans l'Argon à faible pression sont reproduits sur les photos 14 et 15, aux pressions respectives de 6 mm et de 3 mm de mercure. Dans ces essais le cylindre *CD* de verre est remplacé par un cylindre de rhodoïd de 1,5 mm d'épaisseur de paroi. Dans les deux cas on note un liseré *M* très fin à la jonction de la paroi cylindrique avec le plan où se rencontrent les ondes de choc.

10. — Conclusions.

Nous retiendrons avant tout l'efficacité des « charges creuses » pour engendrer des ondes de choc qui se rencontrent en produisant dans l'Argon une luminosité plane.

On pourra par la suite multiplier le nombre des charges creuses (nous décrirons prochainement nos résultats obtenus avec 4 charges creuses convergentes) ou leur puissance individuelle (on placera face à face, deux charges creuses de 50 grammes d'explosif chacune).

En second lieu, on a pu opérer, dans l'Argon, jusqu'à une pression de 3 mm de mercure sans cesser d'obtenir la luminosité au point de rencontre.

Enfin, on montre la possibilité d'introduire au sein du gaz soumis à la détonation des électrodes sous tension, sans troubler la formation des ondes de choc; il y a là des possibilités intéressantes pour soumettre le plasma ionique résultant de la rencontre des ondes de choc à l'action d'un champ électrostatique accélérateur destiné à accroître l'énergie cinétique des ions jusqu'au seuil nécessaire à l'amorçage des réactions nucléaires dans les éléments les plus légers.

RIASSUNTO (*)

In vista di un'ulteriore utilizzazione per l'innesco di reazioni termonucleari, si studia l'incontro di onde d'urto nell'Argon e nell'aria. Le onde d'urto si generano per mezzo di una o due cariche cave a effetto convergente: la luminosità prodotta dall'incontro delle onde si osserva anche a pressioni inferiori alla normale (qualche millimetro di Hg nell'Argon), come pure in presenza di un campo elettrostatico, atto ad accelerare gli ioni prodotti nel punto d'incontro delle onde d'urto.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

NOTE TECNICHE

Una camera di Wilson di grandi dimensioni per ricerche sulla radiazione cosmica.

A. LOVATI, A. MURA, G. TAGLIAFERRI e L. TERRA

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 3 Luglio 1951)

Riassunto. -- Per ricerche sulla radiazione cosmica, è stata costruita una camera di Wilson di grandi dimensioni, adatta per contenere setti di materiale fino a un peso totale di alcuni quintali. Semplicità di manovra e limitato ingombro della camera e apparecchiature relative costituiscono, specie nei laboratori di alta montagna, utili caratteristiche dello strumento qui descritto.

Introduzione.

1. -- L'Istituto di Fisica della Università di Milano ha condotto in questi ultimi anni con camere di Wilson diverse ricerche sulla radiazione cosmica ed in particolare sulle interazioni nucleari a grande energia prodotte da particelle dei raggi cosmici a quote di montagna ⁽¹⁾.

Poichè ricerche di questo genere con la camera di Wilson presentano ancora notevole interesse, nonostante la sempre maggior utilizzazione delle emulsioni fotografiche, all'Istituto è stata recentemente progettata e costruita una camera di Wilson di grandi dimensioni e di notevole semplicità di manovra, adatta a funzionare anche nelle condizioni ambientali piuttosto sfavorevoli che si verificano spesso nei laboratori di alta montagna.

⁽¹⁾ A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **4**, 10 e 102 (1947); A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 e 291 (1949); **7**, 36 e 943 (1950); A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **8**, 271 (1951).

2. - La camera e le apparecchiature relative sono rappresentate nella fig. 1.

Una robusta intelaiatura metallica *A* sostiene la camera *B*. Questa è del tipo a membrana, con un volume sensibile illuminato di 45 dm^3 (la faccia anteriore misura $50 \times 60 \text{ cm}^2$ e la profondità illuminata 15 cm). È prevista la possibilità di collocare nell'interno della camera setti di materiale fino ad un peso totale di alcuni quintali. È pure previsto l'impiego entro la camera di contatori di G.M.. La camera è illuminata lateralmente da due « flash lamp » *D*.

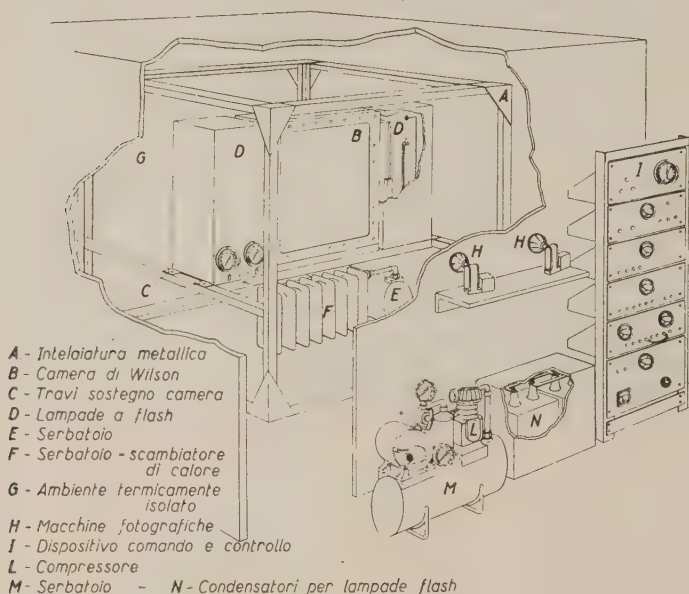


Fig. 1. - La camera di Wilson e le apparecchiature relative.

L'intelaiatura metallica, che ha anche la funzione di sostenere, sopra e sotto la camera, eventuali gruppi di contatori e materiale assorbente e produttore, occupa un'area di $1,35 \times 1,35 \text{ m}^2$ ed è posta in un ambiente termicamente isolato *G*. All'esterno si trovano due macchine fotografiche *H*, per la registrazione stereoscopica, con gli obiettivi affacciati a detto ambiente, e tutti i dispositivi di comando e di controllo *I*, nonchè il compressore *L* ed i condensatori per le lampade a flash *N*.

Tutto l'insieme presenta un ingombro in area orizzontale di $2 \times 3 \text{ m}^2$, e in altezza di circa 2 m .

PARTE I.

LA CAMERA E LE APPARECCHIATURE RELATIVE

La camera.

3. - La camera è costituita da tre pezzi di fusione in lega leggera (silumin).

Il primo costituisce la cornice porta-vetro anteriore.

Il secondo, con finestre laterali chiuse da lastre di plexiglas, costituisce il corpo centrale effettivo della camera; è fissato su due solide travi orizzontali (indicate con la lettera *C* nella fig. 1) della intelaiatura metallica ed è accessibile facilmente nel suo interno, avanti e dietro.

Il terzo pezzo infine costituisce il retrocamera e porta le due piastre forate tra le quali si può muovere la membrana di gomma che

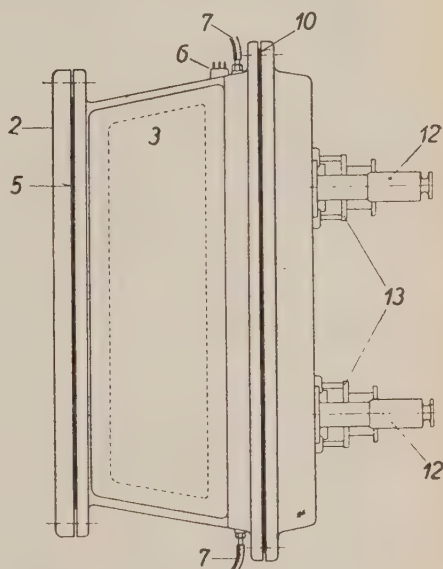
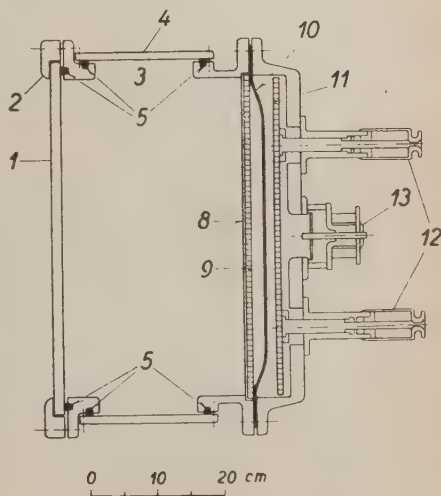


Fig. 2. - Vista laterale e sezione orizzontale della camera: (1) lastra di vetro temperato (spess. 14 mm); (2) cornice porta lastra; (3) finestre per l'illuminazione della camera; (4) lastra in plexiglas (spess. 15 mm); (5) guarnizione di gomma a sezione quadrata (lato 8 mm); (6) passanti metallici isolati (« covar »); (7) condotto per l'immissione della miscela liquida e del gas; (8) velluto nero; (9) lastra forata fissa in duralluminio (fori da 3 mm sui vertici di quadrati di lato 8 mm); (10) membrana di gomma; (11) lastra forata mobile (vedi (9)); (12) vitoni, muniti di premistoppa, per lo spostamento della lastra mobile (in numero di 4); (13) valvole di espansione (in numero di 2).



chiude posteriormente la camera, le valvole di espansione e i dispositivi per la regolazione del rapporto di espansione.

I particolari di carattere costruttivo sono riportati nella fig. 2, che presenta in iscala la vista laterale e la sezione orizzontale della camera.

Nel caso dell'impiego di setti, nell'interno della camera è fissato un telaio porta-setti, che scarica tutto il peso direttamente sulle due travi di sostegno della camera.

Un sistema di passanti metallici isolati (« covar ») consente i collegamenti elettrici per il campo chiarificatore e per gli eventuali contatori posti nell'interno della camera.

La tenuta della camera è assicurata per quello che riguarda le superficie metalliche dalla impermeabilizzazione ottenuta sulle pareti interne con una vernice nera (« Halogenplast » della ditta Iso-Vitrificati di Milano); per quello che riguarda l'applicazione delle lastre di plexiglas e di vetro, per mezzo di guarnizioni di gomma a sezione quadrata alloggiata in apposite scanalature.

I dispositivi per l'espansione.

4. - La camera è riempita di Argon, saturato da una miscela (rapporto in volume 3 : 1) di alcool etilico ed acqua, ad una pressione totale che supera di $\sim 15 \text{ cm}_{\text{Hg}}$ il valore della pressione atmosferica ambiente.

Per mantenere la camera pronta per l'espansione si rifornisce al retrocamera aria compressa ad una pressione appena sufficiente a mantenere la membrana schiacciata contro la piastra forata anteriore. La temperatura dell'aria compressa che si rifornisce deve essere uguale a quella dell'ambiente in cui si trova la camera.

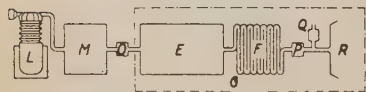


Fig. 3. - Rifornimento dell'aria compressa: (L) compressore; (M) serbatoio da 25 l, pressione 2-6 atmosfere; (O) riduttore di pressione; (E) serbatoio da 50 l, pressione 1-1,5 atmosfere; (F) serbatoio da 25 l (scambiatore di calore), pressione 1-1,5 atm.; (P) valvola elettromagnetica per il rifornimento del retrocamera; (Q) valvola elettromagnetica per la espansione lenta; (R) retrocamera; (G) ambiente termicamente isolato.

Ciò è ottenuto con la disposizione schematizzata in fig. 3. Un compressore L, comandato da un dispositivo automatico meccanico di massima e minima, mantiene in un primo serbatoio M aria a pressione fra 2 e 6 atmosfere; il compressore funziona ad intermittenza e scalda quindi solo limitatamente l'aria che fornisce. L'aria compressa del serbatoio M, attraverso un riduttore di pressione O, passa in due altri serbatoi in serie E ed F, posti nell'ambiente termicamente isolato G; il secondo funziona essenzial-

mente come scambiatore di calore con l'ambiente (ha una grande massa metallica, grande superficie esterna ed è verniciato in nero). Nel retrocamera R la pressione è mantenuta intorno al valore prestabilito grazie ad un dispositivo regolatore di pressione massima e minima agente sulla valvola elettromagnetica P.

5. - L'espansione della camera è ottenuta lasciando sfuggire rapidamente l'aria compressa nel retrocamera da due aperture situate sul fondo della camera tenute normalmente chiuse da due valvole a magnete permanente. Tali valvole, una delle quali è mostrata in sezione in fig. 4, sono simili a quella descritta da FU-HSING CHU e G. E. VALLEY ⁽²⁾: il campo magnetico che tiene chiusa la valvola è dato da un magnete permanente anulare di Alnico (Alni

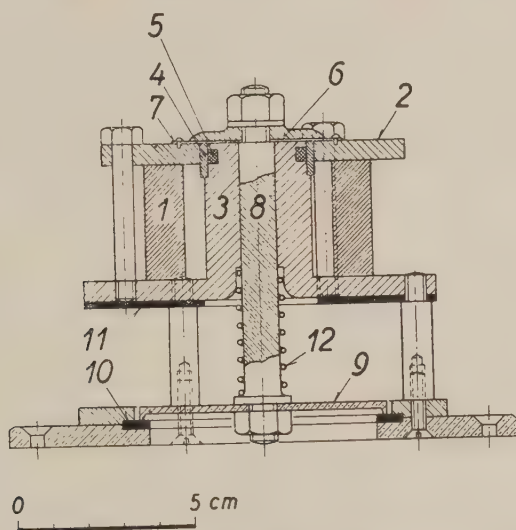


Fig. 4. - Valvola di espansione: (1) magnete permanente di alnico; (2) disco di ferro dolce; (3) disco con perno di ferro dolce; (4) anello di ottone; (5) bobina per il controcampo (50 spire di filo di rame da 3/10 mm); (6) ancora di ferro dolce; (7) lamina di ottone (spessore 1/10 mm), (8) stelo della valvola in alluminio; (9) embolo della valvola in alluminio; (10) guarnizione di gomma; (11) anello di gomma; (12) molla di acciaio.

S1809 della ditta SAMPAS di Milano) e l'apertura si ha quando agisce un controcampo, generato dal passaggio di corrente in alcune spire avvolte attorno al nucleo di ferro. Vantaggi principali di questo tipo di valvola sono la grande rapidità di apertura (qualche millesimo di secondo) e la assenza di dissipazione continua di energia per mantenere il campo magnetico.

6. - Mediante l'apertura della valvola elettromagnetica Q e la chiusura contemporanea della P (vedi fig. 3) vengono effettuate a comando dell'operatore nella fase di messa a punto, e automaticamente durante il « tempo di ricupero » che segue ogni espansione rapida, espansioni lente, utili a rimuovere i nuclei di condensazione non carichi.

(²) FU-HSING CHU e G. E. VALLEY: *Rev. Scient. Inst.*, **19**, 496 (1948).

Illuminazione e fotografia.

7. - Il sistema di illuminazione della camera (fig. 5) è costituito da due lampade a flash lineari della lunghezza di 60 cm, tipo LSD 14 della ditta Mullard di Londra, poste nella linea focale di lenti cilindriche convergenti (distanza

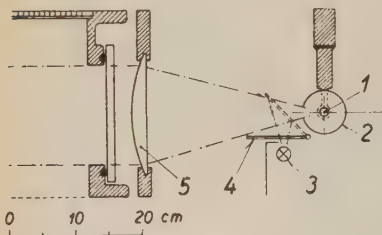


Fig. 5. - Sistema di illuminazione: (1) lampade a flash; (2) riflettore cilindrico; (3) lampade ad incandescenza; (4) specchio piano; (5) lenti cilindriche (distanza focale 15 cm).

focale 15 cm) e munite di riflettori cilindrici. Il fascio luminoso che attraversa la camera ha la larghezza di 15 cm. L'energia dissipata nella scarica di ciascuna lampada è di ~ 530 joule, ed è fornita da un banco di condensatori della capacità di 200 μF caricati a 2300 V. La scarica nelle lampade è innescata facendo arrivare ad un'elica metallica avvolta intorno ad ognuna di esse un impulso di tensione di una decina di kV, ricavato sul secondario di una bobina da automobile (tipo B 5 della ditta Marelli di Milano). L'illuminazione della camera per l'osservazione a vista è realizzata invece con un gruppo di dodici lampade ad incandescenza (6 V, 4 A), la cui luce è raccolta dalle lenti cilindriche dopo riflessione su uno specchio piano.

8. - Il dispositivo per la presa dei fotogrammi consiste di due macchine fotografiche Leica, poste ad angoli di 10° rispetto alla normale alla faccia anteriore della camera, a circa 1,30 m dal centro della camera (vedi fig. 1). Si impiegano obiettivi Elmar ($f = 5$ cm, apertura massima 1 : 3,5) e pellicola per schermografia X3V della ditta Ferrania di Milano. Nelle condizioni suddette l'intensità della luce e la sensibilità della pellicola consentono di ottenere buone fotografie con apertura effettiva 1 : 4,5, sì che tutta la regione illuminata della camera risulta egualmente bene a fuoco.

L'apertura degli otturatori delle macchine fotografiche e l'avanzamento della pellicola (ricarica) avvengono automaticamente: l'apertura per mezzo di un piccolo elettromagnete a succhiamento che preme attraverso una trasmissione a cavo il pulsante di scatto della Leica; l'avanzamento per mezzo di un piccolo motore monofase ad induzione.

Le pellicole vengono sviluppate per un tempo doppio di quello raccomandato dalla casa produttrice.

Stabilizzazione delle condizioni termiche.

9. - Vengono curate in modo particolare le condizioni termiche della camera.

Come si è accennato al numero 2, la camera è posta in un ambiente termicamente isolato. Esso è costituito da una intelaiatura di legno ($2 \times 2 \times 1,80 \text{ m}^3$) con pareti formate da pannelli di faesite di 12 mm di spessore, ricoperti con

lastre di alluminio; gli uni sono separati dalle altre per mezzo di una piccola intercapedine di aria.

Non si è ritenuto necessario, per il momento, provvedere ad un controllo automatico della temperatura nell'interno del suddetto ambiente. Infatti l'isolamento termico ottenuto è risultato tale da attenuare in misura soddisfacente le oscillazioni cui può essere soggetta normalmente la temperatura del locale adibito a laboratorio.

Dall'ambiente in cui è in funzione la camera sono esclusi tutti quegli apparecchi che, dissipando energia in quantità apprezzabile, risulterebbero dannose sorgenti di calore. Un ventilatore rimescola continuamente l'aria nell'ambiente, in modo da garantire in esso uniformità di temperatura.

Si è già detto (numero 4) come si provvede affinché l'aria compressa fornita al retrocamera sia a temperatura pressochè uguale a quella dell'ambiente in cui si trova la camera.

PARTE II.

I DISPOSITIVI PER IL COMANDO DELLE DIVERSE OPERAZIONI

10. — Il ciclo delle diverse operazioni della camera dura quattro minuti. La durata del ciclo è determinata da un motorino a corrente alternata che fa ruotare, con opportuna demoltiplica, un albero portacamme. Uno schema sinottico, che presenta l'insieme dei dispositivi che comandano le varie operazioni, è dato nella fig. 6. Dallo stesso schema è anche deducibile la successione delle operazioni nel ciclo.

Il segnale di comando, proveniente ad esempio da contatori in coincidenza o da un generatore di impulsi, provoca innanzi tutto l'estinzione del campo elettrico chiarificatore e l'apertura delle valvole di espansione della camera; contemporaneamente aziona un dispositivo elettronico di blocco che impedisce la trasmissione di ulteriori segnali eventualmente in arrivo dopo l'inizio del ciclo di operazioni.

Successivamente viene avviato il motorino che fa ruotare l'albero portacamme; vengono aperti gli otturatori delle macchine fotografiche (durata di apertura 0,5 s); e quindi vengono innescate le lampade a flash, la cui accensione determina l'istante della fotografia.

Le operazioni « lente » — espansione

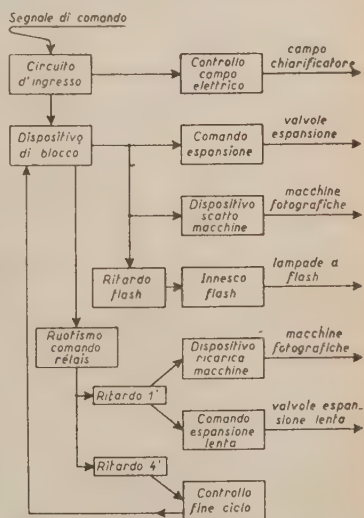


Fig. 6. Schema d'insieme dei dispositivi per il comando delle diverse operazioni.

lenta, ricarica delle macchine fotografiche — hanno luogo ad opera delle camme calettate sull'albero azionato dal motorino: esse sono iniziate ~ 60 s dopo l'arrivo del segnale di comando.

Infine, quando l'albero ha compiuto un giro completo (~ 240 s), una camma richiude un contatto, provocando così lo sblocco del dispositivo di interdizione dei segnali in arrivo, e l'arresto del motorino.

Gli schemi dei circuiti impiegati per comandare le operazioni sopraelencate, sono riportati nelle figure 7-10. Per completezza, sono dati gli schemi di tutti i circuiti; quelli che presentano qualche particolarità, sono brevemente illustrati nei numeri seguenti.

Il dispositivo di blocco (fig. 7).

11. — Il segnale di comando (invertito, se negativo, dal triodo V_1) è applicato alla griglia controllo del thyatron V_3 . All'accensione del thyatron si

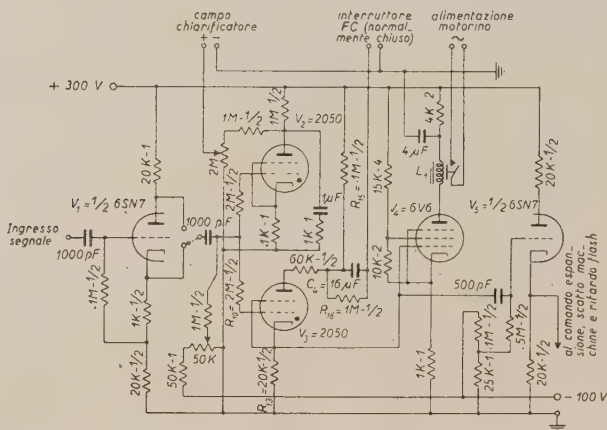


Fig. 7. — Circuito d'ingresso, circuito di blocco e circuito del campo chiarificatore.

ha un rapido aumento della d.d.p. ai capi della resistenza catodica R_{13} . Questo segnale viene trasmesso, con opportuni circuiti di accoppiamento, agli stadi che comandano l'apertura delle valvole di espansione, l'apertura degli otturatori delle macchine, e l'innesco delle lampade a flash. Il catodo del thyatron V_3 è inoltre collegato in continua alla griglia del tetrodo a fascio V_4 : così, quando il thyatron si accende, passa corrente in placca di V_4 e il relé L_1 chiude il circuito di alimentazione del motorino.

Il motorino, azionando una camma, apre l'interruttore FC , isolando l'armatura verso terra del condensatore C_4 , il quale quindi si scarica attraverso la resistenza R_{16} con una costante di tempo ~ 12 s, piccola rispetto ai 240 s di durata del ciclo. Alcuni secondi prima che l'asse portacamme abbia compiuto un giro completo, viene a cessare l'azione della camma, e il condensa-

tore C_4 , che è completamente scarico, ricollegato a terra si ricarica attraverso R_{15} , abbassando la tensione di placca del thyatron fino a spegnerlo. Di conseguenza anche il motorino, ormai in posizione di « inizio ciclo », si ferma.

Naturalmente, i segnali di comando che arrivano mentre il thyatron V_3 è acceso sono bloccati, in quanto in tale condizione essi provocano solo lievi variazioni della d.d.p. ai capi di R_{13} , essendo fortemente attenuati nella rete: R_{10} - spazio conduttore fra griglia e catodo - R_{13} .

Il circuito di comando delle valvole di espansione (fig. 8).

12. - Gli avvolgimenti per generare i controcampi che permettono l'apertura delle valvole di espansione sono in serie tra loro e con un tetrodo a catodo freddo V_9 (Ferranti Neostron N.S.P. 1). Il segnale di innesco per il neostron è prelevato da un multivibratore monostabile (V_7 , V_8) preceduto da un triodo

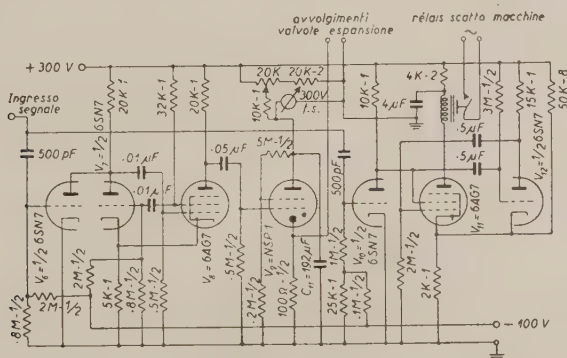


Fig. 8. — Circuiti per l'apertura delle valvole di espansione, e degli otturatori delle macchine fotografiche.

di comando e disaccoppiamento (V_6); l'impulso di uscita del multivibratore dura alcuni millisecondi. La corrente attraverso il neostron e negli avvolgimenti delle valvole è fornita dalla scarica di una capacità di 192 μF (C_{11}) caricata a 270 V.

Il circuito di ritardo e d'innesco delle lampade a flash (fig. 9).

13. - L'elemento fondamentale del circuito di ritardo è un multivibratore monostabile (V_{14} , V_{15} , V_{16} , V_{17}) che realizza uno schema di principio riportato da D. SAYRE⁽³⁾. Questo multivibratore ha la proprietà che la durata

(3) M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 19: *Waveforms* (New York, 1949), pag. 170.

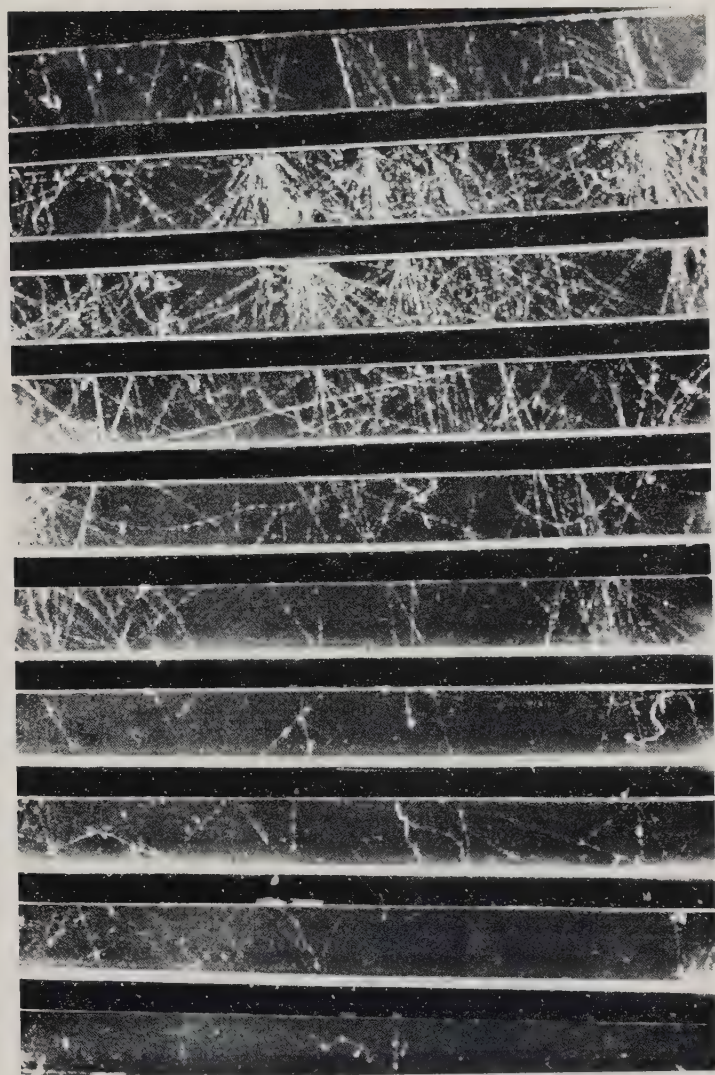


Fig. 11. - Sciame elettronico. Nel quarto setto è prodotta una stella di moderata energia (tutti i setti sono da 1,5 cm di Pb).

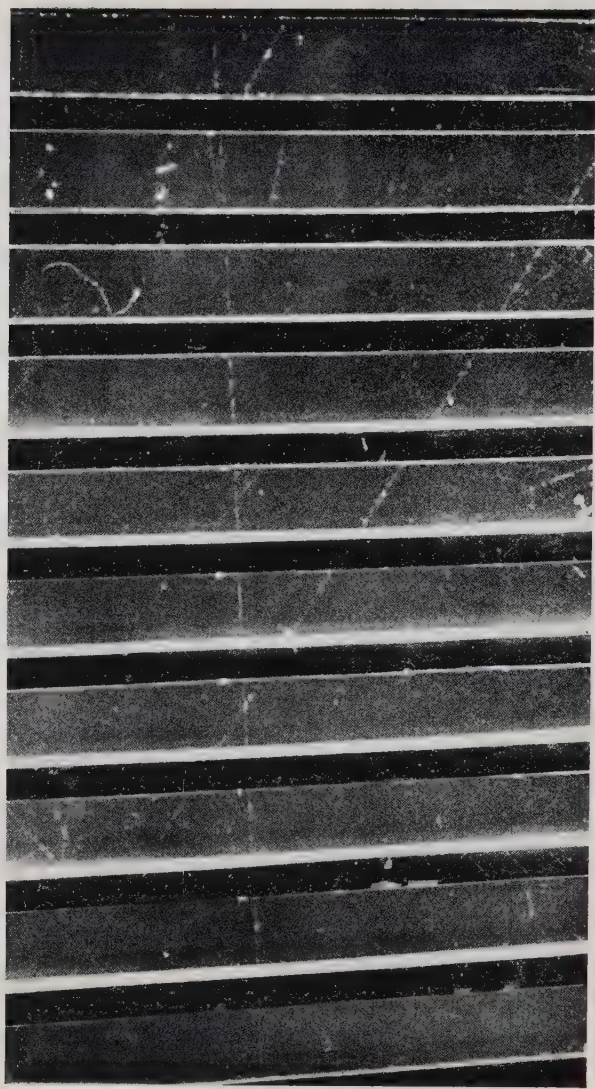


Fig. 12. — Due particelle penetranti incoerenti.

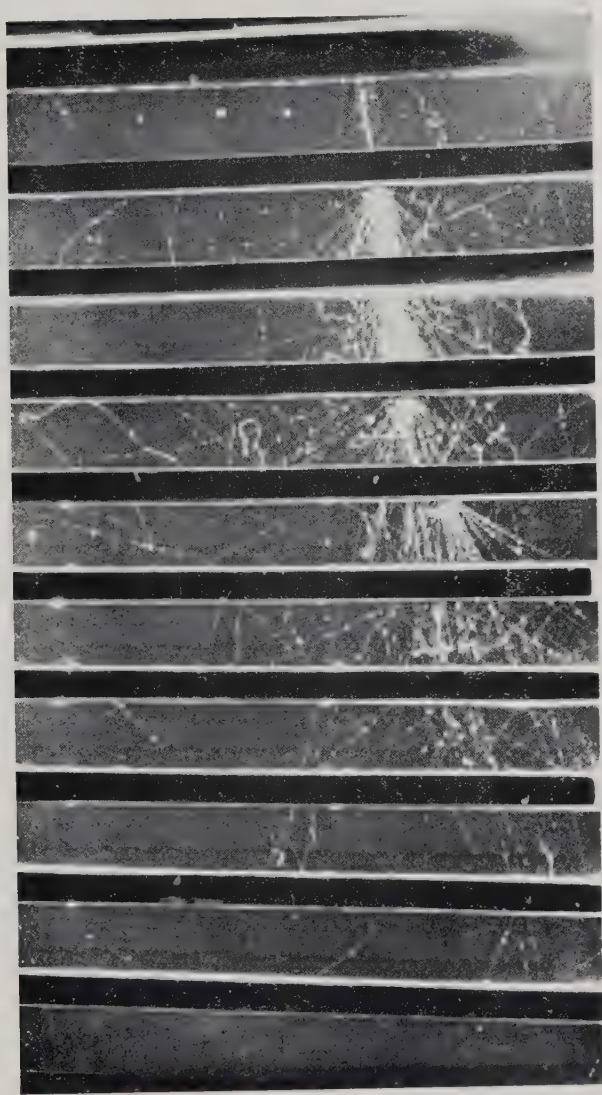


Fig. 13. - Sciame misto prodotto in un blocco di Al di $\sim 25 \text{ g/cm}^2$ sopra la camera.

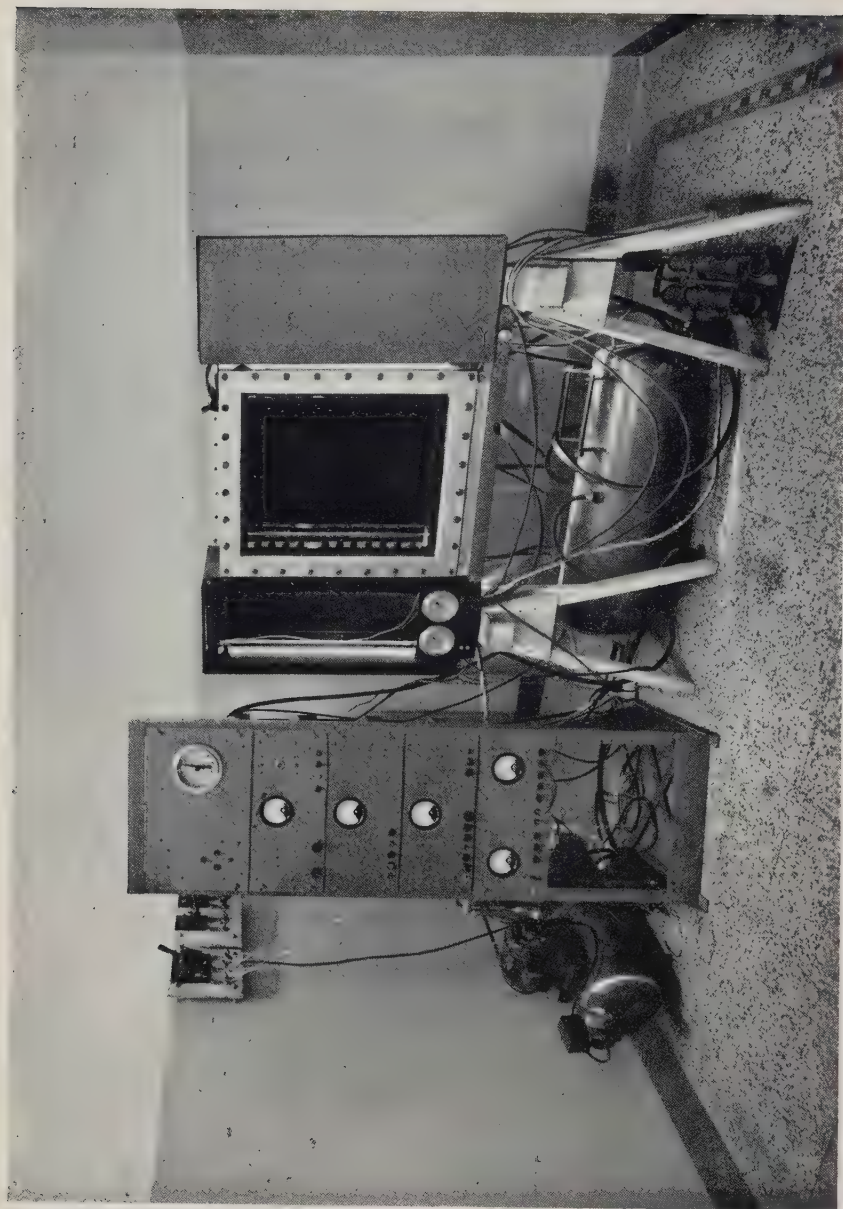


Fig. 14. La camera in fase di montaggio.

conduttanza differenziale di un triodo » ⁽⁴⁾. Il circuito da noi impiegato, della massima semplicità, stabilizza entro $\pm 1\%$ la tensione finale ai capi dei condensatori C_{28} , C_{29} , per variazioni della tensione di rete dell'ordine del $\pm 20\%$. Il tubo stabilizzatore V_{24} è un triodo trasmettente (Telefunken R.S. 31), capace di sopportare sia la tensione finale esistente ai capi dei condensatori, sia valori

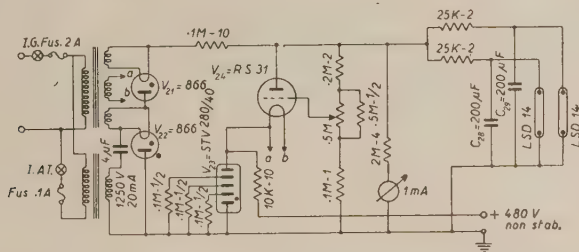


Fig. 10. - Alimentatore A.T. per le lampade a flash.

istantanei della corrente di placca dell'ordine di alcune decine di mA, quali si possono avere all'atto della stabilizzazione della tensione verso valori meno elevati.

Conclusione e ringraziamenti.

15. - La camera è attualmente in funzione al laboratorio della Testa Grigia (3500 m s.l.m.). Tre fotogrammi tipici, scelti tra quelli ivi ottenuti durante la messa a punto per una ricerca sulle interazioni nucleari dei raggi cosmici, e una fotografia della camera in fase di montaggio a Milano sono riprodotti nelle figure 11-14.

16. - È nostro gradito dovere ringraziare il prof. G. POLVANI per aver seguito con vivo interessamento e costante appoggio la progettazione e la costruzione della camera.

Siamo inoltre grati al dott. P. CASALE, per l'attiva collaborazione prestataci nelle diverse fasi di costruzione e messa a punto; al dott. ing. M. STELLA ed ai suoi collaboratori dell'Istituto Tecnico Feltrinelli di Milano, che hanno curato le fusioni e la prima lavorazione; ai tecnici G. ADORNI, M. PESSINA e F. MASSIGNAN, che hanno provveduto al montaggio della camera ed all'approntamento delle apparecchiature relative.

La realizzazione di questo strumento è stata resa possibile dai generosi aiuti finanziari dell'Università di Milano, del Consiglio Nazionale delle Ricerche, del Gruppo degli Amici dell'Istituto, dell'A.N.I.D.E.L. e del dott. ing. L. SESSA.

⁽⁴⁾ Per questa classificazione cfr., ad es., F. V. HUNT e R. W. HICKMAN: *Rev. Scient. Inst.*, **10**, 6 (1939).

SUMMARY

For research on cosmic radiation a large Wilson cloud chamber has been built, suitable to contain several thick plates up to a total weight of some quintals. The instrument constructed is capable of rapid assembly and disassembly for repair, and changement of plate layout; and together with its associated equipment, it occupies only a limited floor area: these characteristics seem quite useful in a mountain laboratory.

Cylindrical Emulsions.

A. BONETTI and G. P. S. OCCHIALINI

University of Genova and Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles

(ricevuto il 12 Luglio 1951)

Summary. -- The advantages of a type of nuclear emulsion on cylindrical support are described, and some of the possible applications are briefly discussed.

In a previous publication ⁽¹⁾ it was suggested that the wire method of loading emulsions could be useful in the analysis of phenomena produced in a liquid or a gas by substituting for the wires, fine capillary tubes. Photo 1 shows the result of a trial of this method. Thin walled glass tubes were arranged to form a grid over a glass plate and the emulsion was poured on. Some of the tubes were filled with a solution of P_{32} (concentration unknown), and some were left empty.

Photo 1a shows the plate in the vicinity of an empty tube, 1b in the vicinity of a filled one, after several hours exposure.

The fact that the fluid can be confined in such a small space and that the photographic method allows identification of the point of origin of the particles makes of this way of examination a rather powerful one. When there is no such collimation in the particles as in the Cosmic Rays stars, the difficulty of following a lightly ionising particle in the emulsion when it does not lie in a plane normal to the line of sight gives a great loss in solid angle. The obvious next step is to use the tube or wire as support, with the emulsion poured around so as to make a cylindrical plate.

A difficulty which arises is the «curling» of the tracks which are not in a plane passing through the axis of the cylinder. This is due to the shrinkage of the emulsion and can be prevented by swelling the emulsion before the drying stage with a liquid which is easily absorbed and which has a refractive index not too different from that of the emulsion. The first choice was to increase

(¹) G. MEULEMANS, G. P. S. OCCHIALINI and A. M. VINCENT: *Nuovo Cimento*, **8**, 341 (1951).

the glycerine concentration of the pre-drying stage⁽²⁾. Plates soaked in glycerine and water before drying seem to show less distortion, than those dried directly after washing⁽³⁾ and we believe that this is related to a reduction in the shrinkage. Miss MIGNONE and one of us (A.B.)⁽⁴⁾ have shown that by soaking the plates in a $10 \div 15\%$ aqueous solution of glycerine (depending on the type of emulsion and processing routine) for a sufficient length of time, the plates after drying are found to be restored to their original thickness. This procedure, which is very helpful in reducing the distortion round the wires in the grid plates, can be employed to prevent the curling of tracks in the cylindrical emulsion.

The method has been put to the usual test of Thorium alpha particle stars. Glass cylinders of 1 mm radius were coated with emulsion about 120 microns thick, which after drying was soaked with Thorium nitrate solution and left for several days exposure. The development and fixing were carried out with the precautions described in numbers 13a and 13b of the Brussels nuclear centre⁽⁵⁾, to avoid strains which can pull the emulsion cylinder out of shape. Before drying, the emulsions were soaked in a 13% aqueous solution of glycerine for 6 hours. Photo 2 shows Th. C' alpha particles normal and parallel to the cylinder axis. The former is 43 microns long, the latter 46 microns, which shows that the glycerine concentration was nearly enough to bring after processing the emulsion to practically the same volume as before.

As it can be seen from the photos, the quality of the image under normal optical conditions is poor. The use of emulsion in this cylindrical shape sets a group of problems in observation. Apart from the special glass which should be used for the support, it is possible that it will be necessary to do some redesigning in the optical parts of the microscope and in the mechanical stage, if the method is to be used to full advantage. For the larger cylinders scanning must be done with specially long distance immersion objectives and condensers. In fact, even on the 1 mm tubes used, the horizontal track, in fig. 2, which is 100 microns below the surface, is looked at through about 400 microns of emulsion. Provision must be made for looking with reflected light when metal bases are used.

Although the actual thickness of the emulsion can be small, more care must be taken in the pouring and processing of such plates than in the normal ones.

Confronted with such complications in its use this method can be justified only if it allows simplified solutions of several problems.

Once the problem of shrinkage has been solved, the emulsion cylinder has many of the applications of the grid plate and of the thick emulsion. Since it affords the possibility of following the path of a particle going vertically to the glass base, it makes easy several applications such as the combination of the cylinder plates with helicoidal focussing, their use in coincidence as a telescope and the filling of the support tubes with high pressure gases.

⁽²⁾ *Ulford Bulletin*, n. 47-a.

⁽³⁾ A. D. DANTON, A. R. GATTIKER and W. O. LOCK: *Phil. Mag.*, **42**, 396 (1951).

⁽⁴⁾ A. BONETTI and G. MIGNONE: private communication.

⁽⁵⁾ C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and L. VERMAESEN: *Bulletin du Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles*, Note n. 13-a; A. BONETTI, C. DILWORTH and G. OCCHIALINI: *Bulletin du Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles*, Note n. 13-b.



Fig. 1.

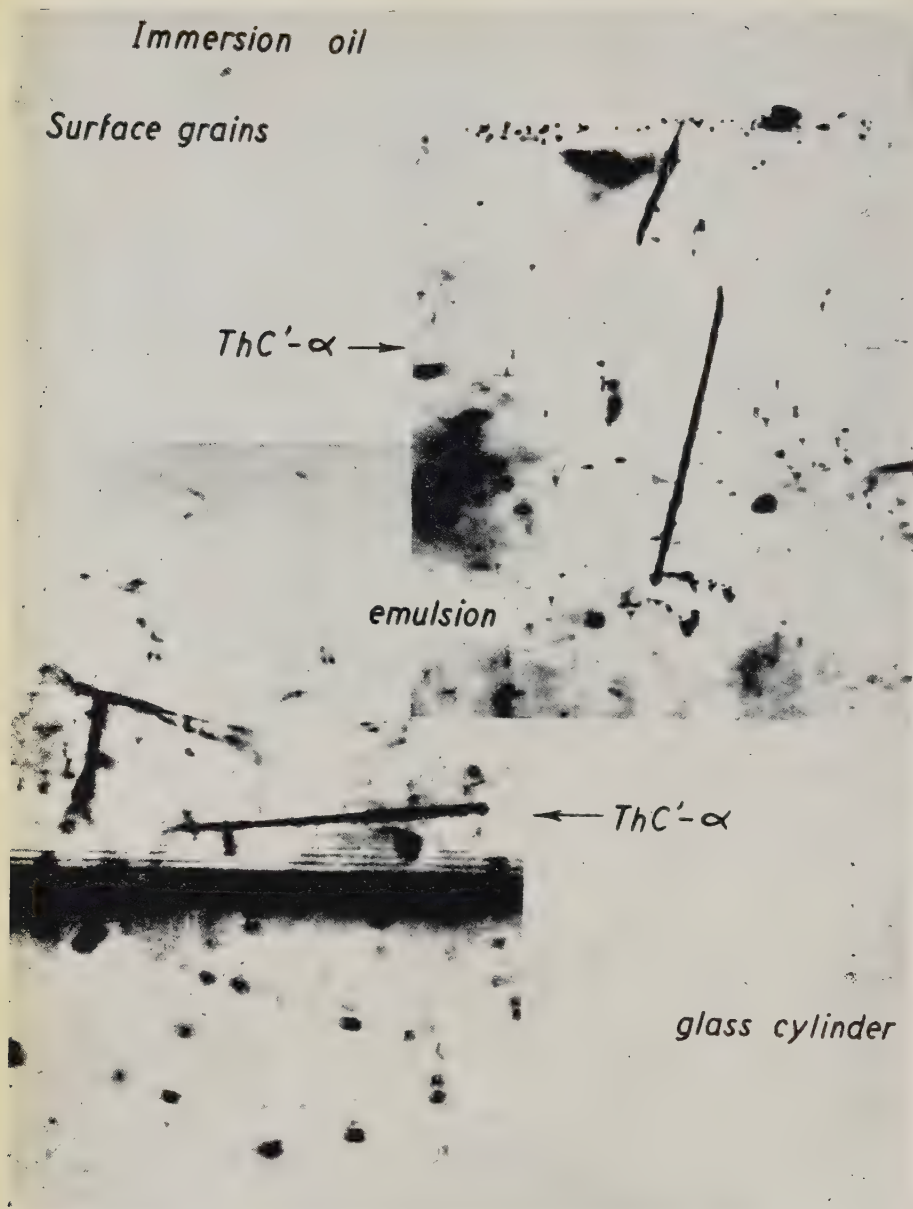


Fig. 2.

A field in which this method can have a modest application the localisation of radioactive regions in tissues. A model experiment has been made in which a radioactive source (α particles) was placed in a cavity in a wood block at a short distance from two crossed cylindrical emulsions. The photographic documentation of the effect is too cumbersome and it is omitted, but this rough trial shows that by the direction of the particles it is possible to localise the position of the source with accuracy.

A rough localisation can be quickly made using the fact that the tracks are present only on the side of the cylindre which is exposed to the radiation. This directionality gives to this type of « needle » detector a slight advantage over a blind one such as the Geiger counters or crystal needles ⁽⁶⁾.

We are indebted to the firm of Ilford Ltd. for having made available emulsions in gel form with which these preliminary experiments have been made.

We thank Prof. COSYNS, Dr. HOUTERMANS, Dr. PICCIOTTO Mr. VINCENT and Mr. WALLER for material help, suggestions, criticism.

We are grateful to Mr. ALDO IGIUNI for his ever willing assistance and to Sig.na MIGNONE for the permission to quote her results.

(⁶) D. DE KOHL: *Nucleonics*, **8**, n. 3, 79 (1951).

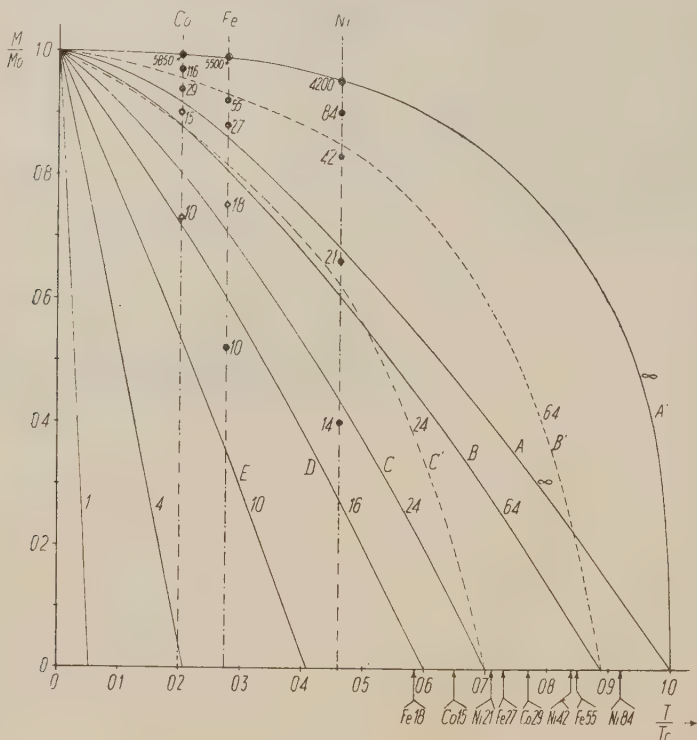
RIASSUNTO

Sono illustrati i vantaggi di un tipo di emulsione nucleare su supporto cilindrico. e sono brevemente discusse alcune delle possibili applicazioni.

ERRATA-CORRIGE

A. DRIGO - Sulla magnetizzazione spontanea e il punto di Curie di lamine ferromagnetiche di piccolissimo spessore, 8, 498 (1951).

Per una svista del disegnatore nella fig. 1 del lavoro suddetto sono stati omissi alcuni numeri: si riproduce pertanto qui la figura suddetta.



LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Alcune osservazioni sulla radiazione che genera le stelle a grande altezza.

M. M. ADDARIO INDOVINA

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 2 Agosto 1951)

Grazie alla cortesia del dott. SALANT, durante una mia breve permanenza al Brookhaven National Laboratory, ho avuto modo di esaminare le stelle prodotte dalla radiazione cosmica in lastre NTB3, esposte per 6 ore sotto 0 e sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite, mediante palloni sonda, fino a circa $16 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di altezza, a 31° e a 57° di latitudine geomagnetica Nord.

Le stelle osservate sono state divise in stelle con almeno una particella al minimum ⁽¹⁾ uscente e in stelle senza alcuna particella al minimum uscente. Nella tabella I sono date sotto 0 e sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite le frequenze alle due latitudini per diversi gruppi di queste stelle, ogni gruppo essendo caratterizzato dal numero dei rami non attribuibili a particelle al minimum. L'esame della tabella I conduce alle seguenti osservazioni:

1) a 57° N di latitudine geomagnetica le frequenze delle stelle con almeno una particella al minimum uscente sono

sempre costanti, entro gli errori statistici, sotto 0 e sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite. Invece la frequenza delle stelle senza alcuna particella al minimum uscente e con un numero di rami ≤ 9 , presenta un evidente aumento sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite;

2) a 31° N di latitudine geomagnetica le frequenze sotto 0 e sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite sono sempre costanti, entro gli errori statistici, per tutte le stelle, sia che abbiano o no particelle al minimum uscenti.

Tenendo presente che a 3500 m s.l.d.m. BERNARDINI e coll. ⁽²⁾ hanno osservato un sicuro effetto di transizione della radiazione che genera le stelle solo per stelle con 3-4 rami, se attribuiamo l'aumento di frequenza per le stelle, senza alcuna particella al minimum uscente e con un numero di rami ≤ 9 , da noi trovato sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite, a un effetto di transizione della radiazione che genera le stelle, possiamo dire che a grande altezza i nucleoni secondari responsabili dell'effetto di transizione hanno un'energia molto più elevata che ad altezza montana.

⁽¹⁾ Una particella è stata detta ai « minimum », quando la traccia, da essa lasciata sull'emulsione fotografica, presenta in 100μ un numero di grani fino a 1,3 volte più grande di quello minimo osservabile.

⁽²⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **79**, 952 (1950).

TABELLA I.

Spessore dell'as- sorbente $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$	Numero dei rami	Frequenza in $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 57°N			Frequenza in $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 31°N		
		Tutte le stelle	Stelle con particelle al minimum uscanti	Stelle senza particelle al minimum uscanti	Tutte le stelle	Stelle con particelle al minimum uscanti	Stelle senza particelle al minimum uscanti
0	3-5	700 ± 37	181 ± 18	518 ± 31	115 ± 7	26 ± 4	89 ± 60
	6-9	322 ± 25	137 ± 16	185 ± 19	47 ± 5	22 ± 3	25 ± 3
	10-14	143 ± 16	80 ± 12	63 ± 11	16 ± 3	10 ± 2	$6 \pm 1,5$
	≥ 15	82 ± 12	67 ± 11	15 ± 5	19 ± 3	16 ± 3	3 ± 1
	≥ 3	1245 ± 67	464 ± 30	780 ± 38	197 ± 10	73 ± 6	123 ± 8
21	3-5	990 ± 47	182 ± 20	808 ± 42	112 ± 6	29 ± 3	83 ± 6
	6-9	424 ± 31	173 ± 19	251 ± 24	50 ± 4	25 ± 3	25 ± 3
	10-14	129 ± 17	89 ± 14	40 ± 9	20 ± 3	14 ± 2	6 ± 1
	≥ 15	55 ± 16	56 ± 11	22 ± 7	22 ± 3	19 ± 3	4 ± 1
	≥ 3	1622 ± 90	500 ± 33	1120 ± 50	204 ± 9	87 ± 6	118 ± 7

TABELLA II.

Spessore dell'as- sorbente $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$	Numero dei rami	Frequenza in $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 57°N			Frequenza in $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 31°N		
		Tutte le stelle	Stelle con particelle al minimum uscanti	Stelle senza particelle al minimum uscanti	Tutte le stelle	Stelle con particelle al minimum uscanti	Stelle senza particelle al minimum uscanti
0	3-5	$56,3 \pm 6,25$	$14,55 \pm 2,25$	$41,6 \pm 4,7$	$58,3 \pm 6,45$	$13,2 \pm 2,6$	$45,2 \pm 5$
	6-9	$25,9 \pm 3,5$	$11 \pm 1,9$	$14,9 \pm 2,34$	$23,8 \pm 3,9$	$11,2 \pm 2,1$	$12,7 \pm 2,15$
	10-14	$11,5 \pm 1,9$	$5,44 \pm 1,3$	$5,06 \pm 1,2$	$8,1 \pm 1,85$	$5,06 \pm 1,26$	$3,04 \pm 0,9$
	≥ 15	$6,6 \pm 1,3$	$5,4 \pm 1,18$	$1,2 \pm 0,47$	$9,6 \pm 2$	$8,1 \pm 1,12$	$1,5 \pm 0,58$
	≥ 3	100	$37,3 \pm 4,5$	$62,6 \pm 6,5$	100	$37,1 \pm 4,85$	$62,4 \pm 7$

TABELLA III

Numero dei rami	Frequenza $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 57°N sotto $0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di assorbente		
	Frequenza $\text{cm}^{-3} \cdot \text{d}^{-1}$ a 31°N sotto $0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di assorbente		
	Tutte le stelle	Stelle con particelle al minimum uscanti	Stelle senza particelle al minimum uscanti
3-5	$6,08 \pm 0,7$	$6,95 \pm 1,8$	$5,83 \pm 0,74$
6-9	$6,85 \pm 1,25$	$6,24 \pm 1,6$	$7,4 \pm 1,66$
10-14	$8,9 \pm 2,7$	$8 \pm 2,9$	$10 \pm 4,7$
≥ 15	$4,3 \pm 1,34$	$4,18 \pm 1,53$	$5 \pm 3,7$
≥ 3	$6,3 \pm 0,66$	$6,35 \pm 0,94$	$6,35 \pm 0,7$

L'osservazione che, a 57° N di latitudine geomagnetica, presentano un aumento di frequenza sotto $21 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di grafite solo le stelle senza alcuna particella al minimum uscente, conduce all'ipotesi che l'energia spesa in un'esplosione nucleare, nella quale vengono emesse particelle al minimum, è molto maggiore di quella spesa in un'esplosione nucleare nella quale vengono emesse solo particelle d'evaporazione. A conferma di ciò si può osservare che la responsabile di questo aumento di frequenza dev'essere la parte meno energetica della radiazione che genera le stelle a 57° N, poichè a 31° N — dove il cut-off è di 8 GeV — questo aumento di frequenza non è più osservato, si potrebbe anzi dire che tale parte della radiazione che genera le stelle è costituita da particelle cariche e aventi un'energia certamente inferiore ad 8 GeV.

Esaminando i valori delle frequenze in % sotto $0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di assorbente, riportate in tabella II e calcolate assumendo uguale a 100 la frequenza di tutte le stelle con un numero di rami ≥ 3 , si vede che a grande altezza la percentuale delle stelle con almeno una particella al minimum uscente è — entro gli errori statistici — la stessa alle due latitudini, mentre essendo a 31° N l'energia della radiazione che genera le stelle più elevata che a 57° N, il numero percentuale delle stelle con almeno una particella al minimum uscente dovrebbe essere più elevato a 31° N di latitudine geomagnetica.

In tabella III riportiamo i valori del rapporto delle frequenze sotto $0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di assorbente alle due latitudini in funzione del numero dei rami. I valori di questi rapporti sono costanti, entro gli errori statistici, al variare del numero dei rami e risultano uguali — sempre entro gli errori statistici — per tutte le

stelle, per le stelle con almeno una particella al minimum uscente e per le stelle senza alcuna particella al minimum uscente. Cioè la frequenza delle stelle aumenta a $16 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di altezza di circa un fattore 6 fra 31° e 57° di latitudine geomagnetica Nord e questo sia per le stelle con pochi rami che per le stelle con molti rami, sia che in queste disintegrazioni nucleari vengano emesse particelle al minimum, sia che vengano emesse solo particelle d'evaporazione.

D'altra parte ad altezza montana altri autori ⁽³⁾ hanno trovato che la frequenza delle stelle aumenta di un fattore 2,1 fra 44° di latitudine geomagnetica N e 12° di latitudine geomagnetica S, e che l'effetto di latitudine diminuisce col crescere del numero dei rami delle stelle. Se l'aumento del fattore da 2 a 6 è ovvio, perchè — come è ben noto — l'effetto di latitudine aumenta coll'aumentare dell'altezza, la costanza dell'effetto di latitudine a grande altezza col variare dell'energia spesa nell'esplosione nucleare può spiegarsi solo coll'ipotesi che a grande altezza tutte, o quasi tutte, le stelle sono create da particelle cariche di elevata energia. Ad altezza montana invece solo le grandi stelle sono attribuibili a particelle molto energetiche e quindi solo la produzione di tali stelle è indipendente dalla latitudine; per le altre stelle la sensibilità alla latitudine aumenta col diminuire dell'energia spesa nell'esplosione nucleare.

Ringrazio il dottor SALANT, il dottor HORNOBOSTEL e il dottor BLAU per la cortesia colla quale mi hanno accolta a Brookhaven e per avermi permesso di esaminare le lastre suddette.

⁽³⁾ S. LATTMORE: *Phil. Mag.*, **41**, 961 (1950).

Ricerca di un effetto orario sulla componente penetrante della radiazione cosmica.

P. BUDINI e G. POIANI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 13 Agosto 1951)

In questi ultimi tempi un rinnovato interesse si è rivolto alla ricerca, sia teorica che sperimentale, di eventuali variazioni temporali nell'intensità della radiazione cosmica. A parte il valore intrinseco che tale effetto comporta, resta il fatto che da esso si possono ricavare, come ha mostrato, ad esempio, L. JANOSSY ⁽¹⁾, delle indicazioni sull'esistenza ed intensità del campo magnetico solare. Anzi recentemente K. DWIGHT ⁽²⁾ ha calcolato, tenendo conto contemporaneamente dei campi magnetici terrestre e solare, ed assumendo diversi valori per il campo magnetico solare e per varie latitudini, l'entità dell'effetto orario che dovrebbe presentare l'intensità verticale della radiazione cosmica alla sommità dell'atmosfera; dalle sue curve risulta che in particolari condizioni l'effetto può risultare abbastanza rilevante.

D'altra parte fra le varie ipotesi sull'origine della radiazione cosmica, quella relativa ad una possibile origine solare ⁽³⁾, può portare a delle conseguenze anche nei

riguardi di una variazione d'intensità legata al tempo solare, e se il meccanismo invocato per l'origine solare della radiazione cosmica tende ad una distribuzione isotropa dell'intensità, non si può escludere che per particolari bande energetiche e particolari direzioni, possano sussistere dei fenomeni variazionali.

Ricerche sugli effetti diurni e stagionali dell'intensità della radiazione cosmica sono stati eseguiti più volte nel passato, ed esse, mentre hanno dato luogo a risultati non sempre concordanti, hanno anche mostrato come tali effetti siano piuttosto piccoli e sempre dell'ordine di qualche decimo per cento.

Poichè le esperienze venivano sempre condotte in modo da rivelare la componente totale, senza alcun particolare riguardo alla direzione di provenienza, abbiamo pensato di intraprendere un tentativo di ricerca di una possibile variazione oraria nell'intensità della radiazione cosmica, usando mezzi piuttosto semplici, ma cercando di esaltare, per quanto possibile, i caratteri che potrebbero portare all'esistenza di un tale effetto. A tal fine abbiamo adottato i seguenti accorgimenti;

a) invece di effettuare la misura sulla totale, abbiamo escluso completa-

⁽¹⁾ L. JANOSSY e P. LOCKETT: *Proc. Phys. Soc.*, A 178, 52 (1941).

⁽²⁾ K. DWIGHT: *Phys. Rev.*, 78, 40 (1950).

⁽³⁾ R. D. RICHTMYER e E. TELLER: *Phys. Rev.*, 75, 1729 (1948).

mente la molle, e tagliato lo spettro della dura all'energia di un GeV;

b) l'asse del telescopio dei contatori era contenuto nel piano meridiano e nel piano medio dell'eclittica, nel periodo dell'esperienza, formando un angolo zenitale di 40° ;

c) gli assi dei contatori erano contenuti nel piano meridiano e l'apertura

guire le correzioni degli effetti corrispondenti.

In figura è riportato il grafico rappresentante la variazione dell'intensità della componente penetrante in funzione del tempo solare, prendendo come unità temporale la durata di due ore.

Il grafico conferma quanto già trovato in precedenti, ed anche recenti ⁽⁴⁾,

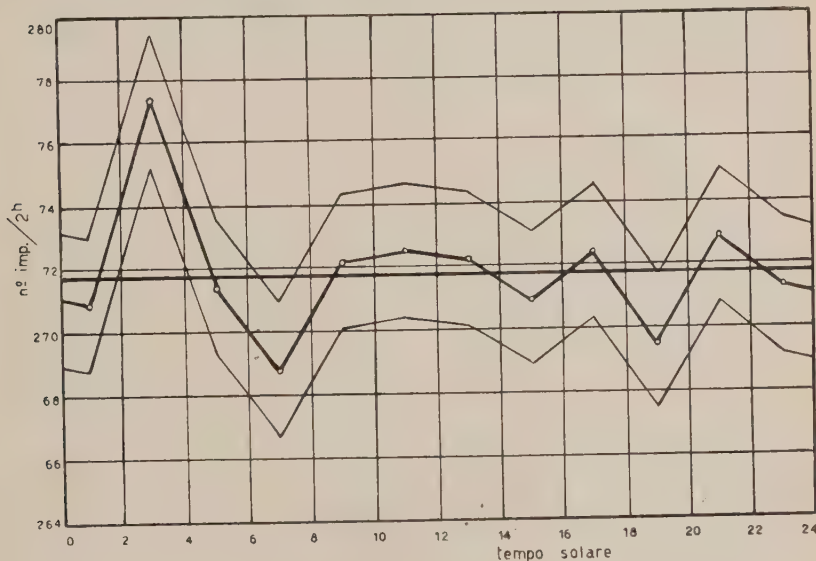


Fig. 1.

angolare del telescopio staccava sull'eclittica media un arco di 10° .

Le misure sono state eseguite con due coincidenze doppie, poste in parallelo; i contatori erano schermati lateralmente da 10 cm di Fe per protezione contro gli sciami laterali. I dati venivano ripresi fotograficamente ogni ora. L'esperienza è stata protratta per circa due mesi (aprile e maggio), in modo da ottenere un errore standard che fosse dell'ordine dell'1%.

Ci siamo valse dei dati di pressione e temperatura comunicatici gentilmente dal locale Istituto Talassografico, per ese-

ricerche e che cioè non si verificano variazioni rilevanti nell'intensità della radiazione cosmica. Il calcolo dell'effetto giorno-notte dai nostri dati porta ad un valore molto basso, inferiore all'1%.

Resta invece da segnalare l'accenno ad un eccesso, nel grafico della intensità, di poco superiore all'errore standard, in corrispondenza al periodo che va dalle 2 alle 4 a.m.. E a tal riguardo è forse da rilevare la coincidenza che, secondo le

⁽⁴⁾ T. A. BERGSTRAHL e C. A. SCHROEDER: *Phys. Rev.*, **81**, 244 (1951).

curve calcolare K. DWIGHT nel lavoro citato, gli eccessi d'intensità sono da aspettarsi proprio in tal periodo.

Non è da escludersi che, sperimentando col metodo direzionale descritto, su determinate bande energetiche dello spettro, con misure differenziali ed intensive, non si possano ritrovare degli effetti orari più marcati, come del resto l'accento contenuto in proposito nel re-

cente lavoro di D. A. GLASER e coll. (*) sembra suggerire.

Ringraziamo il prof. A. GIACOMINI per l'interesse con cui ha seguito la presente ricerca.

(*) D. A. GLASER, B. HAMERMESH e G. SAFONOV: *Phys. Rev.*, **80**, 625 (1950).

Sui fotoni negli sciami estesi dell'atmosfera.

P. BASSI, A. M. BIANCHI e C. MANDUCHI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro studio Ioni Veloci del C.N.R. - Padova

(ricevuto il 18 Agosto 1951)

Lo studio della radiazione cosmica primaria e della componente nucleonica degli sciami estesi ha fatto abbandonare l'ipotesi che i detti sciami siano cascate elettrofotoniche derivanti da un elettrone primario. Sarebbe interessante poter confermare codesta conclusione attraverso un'analisi della componente elettrofotonica, anche per chiarire i rapporti che la legano con quella mesonica e nucleonica: ma i tentativi fatti sinora in questo senso, studiando la struttura trasversale degli sciami (^{1,2,3}), hanno dato risultati che non contraddicono la teoria della cascata.

Non si può escludere però che vi siano altri aspetti del fenomeno più sensibili alla modalità di creazione, come la struttura longitudinale (⁴) o il rapporto fra fotoni ed elettroni.

Abbiamo pertanto iniziato una serie di misure sui fotoni degli sciami estesi, da eseguire sia al livello del mare che a 2000 metri. Diamo un cenno dei risultati ottenuti al livello del mare, riservandoci una trattazione più completa del-

l'argomento non appena terminate le misure in montagna.

Finora sono state tratte indicazioni sulla componente fotonica dallo studio dell'effetto di transizione degli sciami estesi in vari materiali (^{5,6,7}). Poichè in

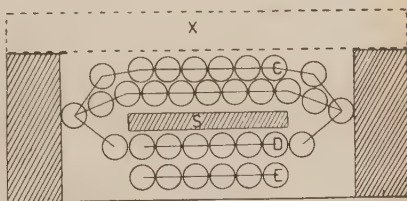


Fig. 1.

questo modo è difficile valutare il contributo dato all'effetto dagli sciami prodotti da elettroni, noi abbiamo preferito eseguire una misura col metodo delle anticoincidenze, usato per la prima volta da L. JANOSSY e B. ROSSI (⁸) nello studio

(¹) R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948).

(²) G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

(³) E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 e 816 (1950).

(⁴) P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 446 (1951).

(⁵) J. DAUDIN: *Compt. Rend.*, **214**, 662 (1942).

(⁶) J. CLAY: *Congresso Como*, 1949.

(⁷) D. D. MILLAR: *Nuovo Cimento*, **8**, 279 (1951).

(⁸) L. JANOSSY e B. ROSSI: *Proc. Roy. Soc.*, **175**, 88 (1939).

della componente fotonica della radiazione totale.

L'esperienza è stata eseguita sotto un tetto di 2 g/cm^2 . Due gruppi di contatori $A-B$ di 1200 cm^2 di area ciascuno sono posti su due vertici di un triangolo equilatero di 4 metri di lato; sul terzo vertice è il dispositivo di anticoincidenza (fig. 1), costituito da due gruppi di contatori $D-E$ in coincidenza doppia, coperti dai contatori C di anticoincidenza, il

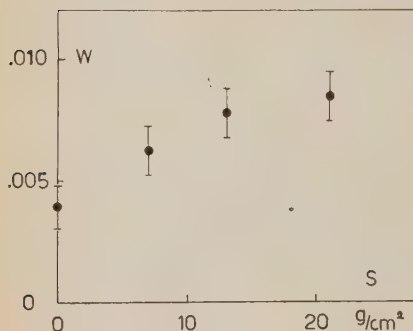


Fig. 2.

tutto schermato lateralmente da muretti di piombo.

Si misura il rapporto fra le coincidenze quaduple $ABDE$ non accompagnate da quintuple $ABCDE$ (che chiameremo $(ABDE)_{\text{antic.}}$) e le coincidenze triple ABC per diversi spessori del convertitore di piombo S . I risultati sono riportati in fig. 2: gli spessori in ascissa comprendono anche le pareti dei contatori.

Abbiamo misurato l'inefficienza dell'anticoincidenza coprendo i contatori C con 6 cm di Piombo in X , in modo che tutti i fotoni potessero moltiplicarsi e giungere ai contatori accompagnati da almeno un elettrone. Il fondo trovato è del $0,39 \pm 0,09\%$.

La curva di fig. 2 è caratteristica di uno spettro di fotoni incidenti forse più energetico di quanto non preveda la teoria

della cascata elettronica; bisogna tuttavia notare (*) che ogni dispositivo di contatori per la rivelazione degli sciame estesi presenta un taglio per le basse densità, cioè per sciame prodotti da primari di bassa energia e per la parte meno energetica degli sciame in genere. D'altra parte a noi interessa essenzialmente lo spettro dei fotoni incidenti, per poterne valutare la probabilità di rivelazione.

Se ora assumiamo la solita legge di potenza

$$\nu(A) = K A^{-\gamma},$$

con $\gamma = 1,5$, quale legame fra frequenza e densità degli elettroni nello sciame, il numero di coincidenze triple ABC è

$$(1) \quad \nu_{ABC} = \nu_0 \int_0^{\infty} A^{-\gamma} (1 - \exp[-MA])^2 \times \\ \times (1 - \exp[-NA]) dA,$$

e il numero di quaduple $ABDE$ anticoincise

$$(2) \quad \nu_{(ABDE)_{\text{ant.}}} = \\ = \nu_0 \int_0^{\infty} A^{-\gamma} (1 - \exp[-MA])^2 \times \\ \times (1 - \exp[-R\lambda A]) \exp[-NA] dA,$$

ove M , N , R sono rispettivamente le aree dei piatti $A-B$, C e $D-E$; α è il rapporto (che in prima approssimazione abbiamo considerato indipendente dalla densità) fra fotoni ed elettroni e λ la probabilità che un fotone incidente venga rivelato dal nostro dispositivo.

Il rapporto $W = \nu_{(ABDE)_{\text{ant.}}} / \nu_{(ABC)}$ che ricaviamo direttamente dall'esperienza, risulta funzione soltanto di α e λ . Per precisare il valore di λ è necessario conoscere lo spettro energetico dei fotoni in arrivo: questo, una volta ammessa una

(*) S. M. MITRA e W. G. V. ROSSER: *Proc. Phys. Soc.*, A **62**, 364 (1949).

generica forma analitica, si può ricavare dai risultati riportati in fig. 2.

Abbiamo valutato che λ dovrebbe essere prossimo a 0,3 per $S = 21$ mm di Piombo e per la geometria da noi adottata. Fissata λ si ricerca per tentativi il valore di α che meglio si accorda coi risultati dell'esperienza, integrando di volta in volta le espressioni (1) e (2). Risulta $\alpha = 0,25$ con un errore di valutazione che non dovrebbe essere supe-

riore al 100%, in generico accordo con quanto ha trovato, ad esempio, D. D. MILLAR (7).

Non entriamo in ulteriori particolari, in attesa di completare le misure in montagna: ci limitiamo a richiamare l'attenzione sul basso valore della densità relativa dei fotoni che è indicato da questa misura e che non pare facilmente giustificabile con la teoria della cascata elettrofotonica.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

R. BECKER - *Teoria della elettricità*.
2 vol. di XII+319 e XII+481 pag.
Trad. it. di M. AGENO. Sansoni,
Ediz. Scientifiche; Firenze, 1950.

La pubblicazione, da parte della Società Editrice Sansoni, della traduzione (curata da M. AGENO) del classico trattato *Teoria della Elettricità* di RICHARD BECKER soddisfa un desiderio che era da lungo vivamente sentito dagli studiosi e dai docenti di materie fisiche e tecniche in Italia. L'opera, che deriva, attraverso successive elaborazioni, da un trattato di ugual titolo di ABRAHAM FÖRPL del 1904, era ben nota agli specialisti (fino al 1941 ne erano uscite undici edizioni tedesche, ed una traduzione francese della sola seconda parte «Teoria degli elettroni»); ma la mancanza di una edizione italiana e la relativa difficoltà di procurarsene le edizioni straniere, rapidamente esaurite, ne impedivano l'uso sistematico come testo per gli studenti dei bienni superiori delle lauree in Matematica ed in Fisica (e, perchè no? in Ingegneria), per i quali il trattato sembra scritto su misura, come prezioso complemento dei corsi istituzionali del primo biennio ed introduzione alle teorie atomiche della costituzione della materia, ed ai corsi di spettroscopia e di fisica teorica.

Il trattato consta di due volumi. Il primo «Introduzione alla teoria maxwelliana della elettricità», contiene, oltre ad una parte introduttiva sul calcolo vettoriale, l'esposizione della teoria «continua» del campo elettromagnetico, ordinata in 10 capitoli secondo un criterio logico-didattico adottato poi da molti trattatisti moderni: Il campo elettrostatico nel vuoto - I dielettrici - Energia

e forze meccaniche nel campo elettrostatico - La corrente elettrica stazionaria - I vettori magnetici - Elettrodinamica dei mezzi in quiete - Elettrodinamica delle correnti quasistazionarie - Onde elettromagnetiche - Termodinamica dell'energia del campo - Azioni ponderomotrici nei campi variabili col tempo.

Pregi singolari della esposizione, accanto alla cristallina chiarezza delle dimostrazioni, sono da un lato la stretta aderenza ai fondamenti sperimentali, dai quali BECKER prende sempre le mosse, rifuggendo da impostazioni astratte di apparente maggior rigore logico-formale; dall'altro, l'intima fusione, magistralmente ottenuta, fra l'intelaiatura classica, fisico-matematica, della teoria, e le applicazioni allo studio fenomenologico delle proprietà della materia, guida necessaria e sicura alle teorie strutturali e microscopiche. Ne è un esempio particolarmente felice il paragrafo dedicato alla elettrostrizione, come applicazione delle considerazioni sulla energia del campo elettrostatico. Questi pregi non sono, del resto, che due aspetti di un unico atteggiamento mentale, che si può riassumere con le parole «senso fisico» e che pervade l'intero volume (come pure il secondo sulla «Teoria elettronica») in misura quale difficilmente si trova negli altri trattati sullo stesso argomento. Ne fa fede anche l'ampia raccolta di esercizi, utilissima soprattutto per lo studente, il quale voglia (come afferma la gustosa citazione biblica) «mettere in pratica il Verbo e non soltanto ascoltarlo...».

A taluno potrà forse sembrare non del tutto soddisfacente, da un punto di vista logico-didattico, l'introduzione delle grandezze matematiche, al principio della

sezione C). Ma in questi casi si tratta, più che altro, di una questione di gusto individuale.

Magistrale, sotto ogni punto di vista, è invece il capitolo sulla termodinamica della energia del campo.

Nel secondo volume, forse in Italia più noto, del primo, attraverso la traduzione francese, il primo capitolo — Principi generali della teoria elettronica — è dedicato alla descrizione e discussione delle esperienze e dei fenomeni elementari fondamentali sui quali riposa l'ipotesi della struttura granulare delle cariche elettriche e della costituzione elettronica della materia, nonché alla formulazione del programma e delle ipotesi di partenza della teoria elettronica. Nel secondo capitolo è studiato il problema del moto e dell'irraggiamento di un elettrone soggetto ad un legame elastico, come quello che deriva dal modello atomico di Thomson.

Nei capitoli seguenti: Deduzione delle equazioni di Maxwell dalle equazioni fondamentali della teoria elettronica - La polarizzabilità elettrica statica - La polarizzabilità elettrica nei campi rapidamente variabili - Le proprietà magnetiche della materia - Teoria elettronica dei metalli, le equazioni ottenute nei primi due capitoli sono applicate alla deduzione delle proprietà elettriche e magnetiche dei mezzi materiali, che nell'elettromagnetismo classico vengono descritte per mezzo dei parametri materiali costante dielettrica, permeabilità magnetica, conducibilità. Nel capitolo sulle proprietà magnetiche ed in quello, mirabile, sulla teoria elettronica dei metalli vengono usati concetti e metodi schiettamente quantistici; ma ciò avviene, pur senza una completa giustificazione teorica (che non sarebbe possibile nei limiti del trattato) con naturalezza, come necessaria modificazione della teoria classica, sotto la guida costante di quel senso fisico a cui abbiamo prima accennato.

Segue un capitolo — Le equazioni

del campo nei corpi non magnetizzabili in movimento lento — in cui le equazioni fondamentali vengono rielaborate e sono esposte e discusse le esperienze di Fizeau e di Michelson come avvio alla critica del concetto di etere ed alla Teoria della Relatività (ristretta), a cui è dedicato il capitolo successivo, un modello di chiarezza e di completezza.

Chiude il volume un capitolo sulla Teoria della radiazione nera, che comprende dimostrazione ed applicazione della formula di Planck dell'irraggiamento. Il lettore viene così condotto passo per passo fino alle soglie della Fisica Atomica propriamente detta e della Meccanica Quantistica; e vi giunge munito, in modo non superficiale e frammentario, ma completo ed organico, di tutte le conoscenze, teoriche e sperimentali, che gli saranno necessarie per proseguire l'indagine.

Ottima la traduzione di M. AGENO, di tono adeguato all'importanza dell'opera, scorrevole, e priva di quelle asprezze e quei contorcimenti linguistici che spesso viziano le traduzioni dal tedesco. Non molto numerosi, ma tuttavia abbastanza per farsi rilevare, gli errori di stampa, particolarmente fastidiosi nelle formule.

L. MEZZETTI

Ferromagnétisme et antiferromagnétisme. « Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique », vol. XXVII, di pagg. 360. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1951.

Dal 3 al 6 luglio 1950 si è tenuta a Grenoble, sotto gli auspici del Centre National de la Recherche Scientifique e con l'appoggio materiale della fondazione Rockefeller, la terza conferenza internazionale sul magnetismo, con la partecipazione di numerosi scienziati francesi e di una ventina di invitati stranieri.

Per dare un'idea dell'importanza della

conferenza è sufficiente la considerazione degli undici anni trascorsi dalla precedente riunione internazionale di Strasburgo (1939) e del rapido sviluppo degli studi sul magnetismo in questi ultimi tempi.

Le quarantanove memorie scientifiche presentate e discusse a Grenoble in tale occasioni vedono ora la luce in veste di volume indipendente, dopo essere state pubblicate nel numero di marzo 1951 di *Le Journal de Physique et le Radium*.

Non è naturalmente possibile, in questa sede, una recensione dettagliata dei singoli lavori, che coprono praticamente

tutto il vasto campo degli attuali studi sul magnetismo, dalle anomalie nel comportamento delle sostanze paramagnetiche alle basse temperature, al ferromagnetismo del disprosio metallico, dalla magnetostrizione, al comportamento della permeabilità alle altissime frequenze, alla determinazione di precisione dei punti di Curie, ecc. ecc.

Ci limitiamo pertanto a segnalare l'interessante volume, augurando che nelle future riunioni concernenti un tale importantissimo campo di studi non si ripeta l'attuale totale assenza di ricercatori italiani.

M. AGENO

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA